CPGE My Youssef, Rabat

بِسمِ اللَّهِ الرَّحمَٰنِ الرَّحِيمِ

رَبِّي إِشرَح لِي صَدرِي وَ يَسِّر لِي أَمرِي وَ
أَحلُل عُقدَة مِن لِسَانِي يَفقَهُوا قَولِي

صَدَقَ اللَّهُ العَظِيم
سورة طه

DS Commun 7 (08-09): *Arithmétique* *Séries numériques* *Fonctions réelles*

Lundi 6 Avril 2009

Durée : 4heures

Conseils pour la rédaction et la présentation des copies.

- **Chaque variable utilisée dans une démonstration doit être définie.**
- **L'énoncé ne doit pas être recopié sur les copies.**
- **Chaque résutat annoncé doit être justifié en citant précisément le théorème du cours avec ses hypothèses exactes utilisé ou en citant le numéro de la question précèdente utilisée.**
- **Les résultats importants doivent être simplifiés et encadrés.**
- **Les calculs doivent être détaillés et expliqués à l'aide de phrases simples.**
- **Laisser une marge à gauche de chaque feuille, en tirant un trait vertical, et un horizontal de la 1ère double feuille pour la note et les remarques du correcteur.**
- **Numéroter les double feuille de la façon suivante : 1/n,2/n,...,n/n où n est le nombre total de double feuille.**
- **Les questions doivent être traités dans l'ordre de l'énoncé.**
- **Tirer deux traits diagonaux pour rayer une partie du raisonnement que vous considérez fausse.**

Problème 1

Source: DS-MPSI, Guez de Balzac, Angoulême, France.

Partie I

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère le point $A(1,0)$. Pour $t \in \mathbb{R}$, on note $\mathcal{D}_t$ la droite de coefficient directeur t et qui passe par A. On note $\mathcal{C}$ le cercle de centre l'origine et de rayon 1.

Q1) Donner une équation de $\mathcal{D}_t$.

Q2) Montrer que la droite $\mathcal{D}_t$ rencontre le cercle $\mathcal{C}$ en un point $M(x(t), y(t))$ différent de A. Préciser $x(t)$ et $y(t)$.

Q3) Montrer que t est rationnel si et seulement si $x(t)$ et $y(t)$ sont rationnels.

Q4) Montrer que l'on réalise ainsi une bijection entre $\mathbb{Q}$ et $\{M(x,y) \in \mathcal{C} \setminus \{A\} \ / \ x, y \in \mathbb{Q}\}$.

Q5) Déduire de ce qui précède, que les points de $\mathcal{C}$ dont les deux coordonnées sont rationnelles, sont les points $M(x, y)$ avec :

$$\begin{cases} x = \frac{p^2-q^2}{p^2+q^2} \\ y = \frac{2pq}{p^2+q^2} \end{cases} \quad \text{avec } p, q \in \mathbb{Z}, \text{ premiers entre eux.}$$

Partie II

Dans cette partie on considère l'équation $a^2 + b^2 = c^2$ d'inconnues $a, b, c \in \mathbb{Z}$ avec a, b, c non nuls.

Q1) Donner une solution simple de cette équation (avec a, b, c non nuls). Dans la suite (a, b, c) désigne une solution de l'équation avec a, b, c non nuls.

Q2) Soit $d = \text{PGCD}(a, b)$, montrer que $d = \text{PGCD}(a, c) = \text{PGCD}(b, c)$. Dans la suite, on pose $a = da', b = db'$ et $c = dc'$ avec a', b', c' premiers entre eux deux à deux.

Q3) Justifier l'existence de deux entiers p et q premiers entre eux tels que :

$$\frac{a'}{c'} = \frac{p^2-q^2}{p^2+q^2} \text{ et } \frac{b'}{c'} = \frac{2pq}{p^2+q^2}$$

Q4) En déduire qu'il existe un entier k tel que :

$$\begin{cases} p^2 - q^2 = ka' \\ 2pq = kb' \\ p^2 + q^2 = kc' \end{cases}$$

Q5)
a) Montrer que $|k| = \text{PGCD}(p^2 + q^2, 2pq) = \text{PGCD}(p^2 + q^2, 2)$.
b) En déduire que si p et q sont de parité différente, alors $|k| = 1$. Donner alors l'expression de a, b et c.
c) Montrer que si p et q sont impairs, alors $|k| = 2$. Soient $u = \frac{p+q}{2}$ et $v = \frac{p-q}{2}$, montrer que u et v sont premiers entre eux. Exprimer a', b' et c' en fonction de u et v. En déduire a, b et c.
d) Conclure.

Problème 2

Source: DS-MPSI, Guez de Balzac, Angoulême, France.

$$\text{On pose } f(x) = (x^2 - 1)\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right).$$

Q1)
a) Quel est l'ensemble de définition de f ?
b) Montrer que f admet un prolongement par continuité en 1, préciser. Dans la suite on étudie la **fonction prolongée**.
c) Montrer que l'on peut réduire l'étude de f à l'intervalle $[1, +\infty[$.
d) Étudier la continuité et la dérivabilité de f sur $[1; +\infty[$.

Q2)
a) Déterminer une fonction h telle que :

$$\forall x > 1, f'(x) = 2xh(x)$$

b) Étudier la fonction h, en déduire son signe.

. c) En déduire le tableau (complet) des variations de f sur $[1;+\infty[$.

Q3) a) Montrer que $f(x) \underset{+\infty}{\sim} 2x$.

b) *On admet que* $\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + u^2\varepsilon(u)$ *où* $\lim\limits_{u\to 0} \varepsilon(u) = 0$. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - 2x = 0$ (on posera $u = \frac{1}{x}$). Que peut-on en conclure ?

Q4) Soit $g(x) = f(x) - 2x$ pour $x > 1$.

a) Calculer $g'(x)$ et $g''(x)$.

b) Montrer que pour $u > 0$: $\ln(1+u) \leqslant \dfrac{u(u+2)}{2(u+1)}$, en déduire que $g''(x) \leqslant 0$ (prendre $u = \frac{2}{x-1}$).

c) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 2$. En déduire le signe de $g'(x)$.

d) Quel est le signe de $g(x)$ sur $[1;+\infty[$?

e) Donner l'allure de la courbe représentative de f.

Problème 3

Source: EM-Lyon 2007, Grande Ecole de commerce

.

Fin
Bonne chance