

d. Dresser le tableau de variation de A .

En déduire que f est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$.

e. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

3. On considère l'application

$$B : [0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto B(x) = -\frac{3x^2 + 2x}{(1+x)^2} + 2 \ln(1+x).$$

a. Montrer que f est deux fois dérivable sur $]0; +\infty[$, et que, pour tout $x \in]0; +\infty[$, $f''(x) = \frac{B(x)}{x^3}$.

b. Dresser le tableau de variation de B .

En déduire que f est convexe sur $]0; +\infty[$.

4. Tracer l'allure de la courbe représentative de f .

Partie II

Un développement en série

1. Montrer, pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $t \in [0; 1]$:

$$\frac{1}{1+t} = \sum_{k=0}^N (-1)^k t^k + \frac{(-1)^{N+1} t^{N+1}}{1+t}.$$

2. En déduire, pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0; 1]$:

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^N \frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1} + J_N(x),$$

où on a noté $J_N(x) = \int_0^x \frac{(-1)^{N+1} t^{N+1}}{1+t} dt.$

3. Établir, pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0; 1]$: $|J_N(x)| \leq \frac{x^{N+2}}{N+2}.$

4. En déduire que, pour tout $x \in [0; 1]$, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$ converge et que :

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}.$$

Partie III

Égalité d'une intégrale et d'une somme de série

1. Montrer, en utilisant le résultat de **II.3.**, pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0; 1]$:

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^N \frac{(-1)^k x^k}{k+1} \right| \leq \frac{x^{N+1}}{N+2}.$$

2. Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ converge et que : $\int_0^1 f(x) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}.$

3. Montrer, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{cases} \sum_{n=1}^{2N+1} \frac{1}{n^2} = \sum_{p=0}^N \frac{1}{(2p+1)^2} + \sum_{p=1}^N \frac{1}{4p^2} \\ \sum_{n=1}^{2N+1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \sum_{p=0}^N \frac{1}{(2p+1)^2} - \sum_{p=1}^N \frac{1}{4p^2}. \end{cases}$$

4. On admet que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Montrer : $\int_0^1 f(x) dx = \frac{\pi^2}{12}$.

Partie IV

Recherche d'extremum pour une fonction réelle de deux variables réelles

On note $F :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto F(x) = \int_0^x f(t) dt$

et $G :]0; +\infty[^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto G(x, y) = F(xy) - F(x) - F(y)$.

1. Montrer que G est de classe C^2 sur $]0; +\infty[^2$.

Exprimer, pour tout $(x, y) \in]0; +\infty[^2$, les dérivées partielles premières et secondes de G en (x, y) en fonction de $x, y, f(x), f(y), f(xy), f'(x), f'(y), f'(xy)$.

2. Établir que G admet $(1, 1)$ comme unique point critique.

3. Est-ce que G admet un extremum local ?

DEUXIÈME PROBLÈME

On note n un nombre entier fixé supérieur ou égal 2, E le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ constitué des polynômes de degré inférieur ou égal à n et $\mathcal{B} = (1, X, \dots, X^n)$ la base canonique de E .

Partie I

Étude d'un endomorphisme de E

1. Montrer que, pour tout polynôme P de E , le polynôme $((X^2-1)P)''$ est élément de E , où $((X^2-1)P)''$ désigne le polynôme dérivée seconde de $(X^2-1)P$.

On note $\phi : E \rightarrow E$ l'application qui, à tout polynôme P de E , associe $\phi(P) = ((X^2-1)P)''$.

2. Vérifier : $\phi(1) = 2$, $\phi(X) = 6X$.

3. Montrer que ϕ est un endomorphisme de E .

4. Calculer $\phi(X^k)$ pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$ et écrire la matrice A de ϕ dans la base \mathcal{B} .

5. a. Montrer que ϕ admet $n + 1$ valeurs propres deux à deux distinctes que l'on notera $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ avec $\lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_n$.
b. Est-ce que ϕ est bijectif ?
c. Montrer que ϕ est diagonalisable et déterminer, pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, la dimension du sous-espace propre de ϕ associé à λ_k .
6. Soient $k \in \{0, \dots, n\}$ et P un vecteur propre de ϕ associé à la valeur propre λ_k .
a. Montrer que le degré du polynôme P est égal à k .
b. Montrer que le polynôme Q défini par $Q(X) = P(-X)$ est un vecteur propre de ϕ associé à λ_k .
7. En déduire qu'il existe une unique base (P_0, P_1, \dots, P_n) de E constituée de vecteurs propres de ϕ telle que, pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, P_k est un polynôme de degré k , de coefficient dominant égal à 1 et vérifiant $P_k(-X) = (-1)^k P_k(X)$.
Que peut-on en déduire sur la parité de P_k ?
8. Calculer P_0, P_1, P_2, P_3 .

Partie II

Un produit scalaire sur E

1. Montrer que l'application : $(P, Q) \mapsto (P | Q) = \int_{-1}^1 (1 - x^2)P(x)Q(x) dx$ est un produit scalaire sur E .

On munit dorénavant E de ce produit scalaire noté $(. | .)$.

2. a. À l'aide d'intégrations par parties, établir que ϕ est un endomorphisme symétrique de E .
b. Montrer que la base (P_0, P_1, \dots, P_n) de E obtenue à la question I.7 est orthogonale.

Soit $j \in \{1, \dots, n\}$.

3. a. Montrer que pour tout polynôme S de degré inférieur ou égal à $j - 1$, on a : $(S | P_j) = 0$.
b. En considérant $(1 | P_j)$, montrer que P_j ne garde pas un signe constant sur l'intervalle $] - 1 ; 1[$.
c. En déduire que P_j admet au moins, dans l'intervalle $] - 1 ; 1[$, une racine d'ordre de multiplicité impair.
4. On note $\{x_1, \dots, x_m\}$ l'ensemble des racines d'ordre de multiplicité impair de P_j appartenant à l'intervalle $] - 1 ; 1[$ et $S_m = (X - x_1)(X - x_2) \cdots (X - x_m)$.
a. Justifier : $m \leq j$.
b. Montrer que le polynôme $S_m P_j$ (produit des polynômes S_m et P_j) garde un signe constant sur l'intervalle $] - 1 ; 1[$.
c. En considérant $(S_m | P_j)$, montrer que $m = j$.
d. En déduire que P_j admet j racines simples réelles toutes situées dans l'intervalle $] - 1 ; 1[$.

