DS 9 : Intégration sur un segment — Fonctions à deux variables — Équations différentielles

Lundi 31 Mai 2004

Corrigé

Exerices : *Chaque question est notée sur 1 point.*

1. $f(x,y) = g\Big(\dfrac{1+y^2}{x}\Big)$.
2. $(0,0)$: non extrémal alors que $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ est un minimum absolu.
3. $I = \dfrac{2}{1701}$.
4. $y = -\cos x + \dfrac{\sin x + \lambda}{1+x}$.
5. $y(x) = (\lambda x + \mu)e^x + \dfrac{x^3}{3}e^x$.

Premier Problème .

Premiére Partie : exemples.

I.1.$T(f_\omega)(x) = \displaystyle\int_{x-1}^{x+1} e^{\omega t}dt = \left[\frac{e^{\omega t}}{\omega}\right]_{x-1}^{x+1} = \frac{2e^{\omega x}\mathrm{ch}\omega}{\omega}$. Calculons maintenant $T(g)$.

Si $x \leq -1$ alors $[x-1, x+1] \subset]-\infty, 0]$ dans ce cas $f = 0$ sur $[x-1, x+1]$ et alors $T(g) = 0$ sur $]-\infty, -1]$

Si $x \in [-1, 0]$ alors $x - 1 \leq 0 \leq x + 1 \leq 1$ et donc $T(g)(x) = \displaystyle\int_{x-1}^{0} g(t)dt + \int_0^{x+1} g(t)dt = 0 + \int_0^{x+1} tdt = \frac{(x+1)^2}{2}$.

Si $x \in [0, 1]$ alors $x-1 \leq 0 \leq 1 \leq x+1 \leq 2$ et donc $T(g)(x) = \displaystyle\int_{x-1}^{0} g(t)dt + \int_0^1 g(t)dt + \int_1^{x+1} g(t)dt = 0 + \int_0^1 tdt + \int_1^{x+1}(2-t)dt = 0 + \frac{1}{2} + \left[\frac{-(2-t)^2}{2}\right]_1^{x+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{(x+1)^2}{2} = 1 - \frac{(x+1)^2}{2}$.

Si $x \in [1, 2]$ alors $0 \leq x-1 \leq 1 \leq 2 \leq x+1$ et donc $T(g)(x) = \displaystyle\int_{x-1}^{1} g(t)dt + \int_1^2 g(t)dt + \int_2^{x+1} g(t)dt = \int_{x-1}^{1} tdt + \int_1^2 (2-t)dt + 0 = \frac{1}{2} - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{1}{2} = 1 - \frac{(x-1)^2}{2}$.

Si $x \in [2, 3]$ alors $1 \leq x - 1 \leq 2 \leq x + 1$ et donc $T(g)(x) = \displaystyle\int_{x-1}^{2} g(t)dt + \int_2^{x+1} g(t)dt = \int_{x-1}^{2}(2-t)dt + 0 = \frac{(3-x)^2}{2}$.

Si $x \geq 3$ alors $[x-1, x+1] \subset [2, +\infty[$ et donc $g = 0$ sur $[x-1, x+1]$ et par suite $T(g) = 0$ sur $[x, +\infty[$.

I.2.

I.2.1. Pour çela il suffit de montrer que $\forall x \in \mathbb{R} \quad g(2-x) = g(x)$. Ce qui est simple en étudiant les cas $x \leq 0; 0 \leq x \leq 1; 1 \leq x \leq 2; 2 \leq x$.

I.2.2.

I.2.3. Aprés avoir dessiner la courbe de $T(g)$ on remarque que la droite d'équation $x = 1$ est un axe de symétrie, pour le justifier on montre aussi que $\forall x \in \mathbb{R} \quad T(g)(2-x) = T(g)(x)$ en étudiant les cas $x \leq 0; 0 \leq x \leq 1; 1 \leq x \leq 2; 2 \leq x$. .

I.2.4. Si la fonction $T(g)$ était de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ alors $T(g)' : x \mapsto g(x+1) - g(x-1)$ serait dérivable en 2, or $x \mapsto g(x+1)$ est dérivable en 2, car g dérivable en 3, d'où $x \mapsto g(x-1)$ serait dérivable en 2, c'est à dire g dérivable en 1 ce qui n'est pas le cas puisqu'il présente un point anguleux en ce point car les deux dérivés à gauche et à droite sont différentes.

Deuxiéme partie : étude de T.

II.1. Soit un élément f de E ,donc f est une application de $\mathbb{R}$ vers lui même, par définition de $T(f)$, elle est aussi application de $\mathbb{R}$ vers lui même donc un élément de E.

On a $\forall x \in \mathbb{R} \quad T(f)(x) = F(x+1) - F(x-1)$ où F une primitive de f donc F dérivable sur $\mathbb{R}$ car f continue sur $\mathbb{R}$ et par suite $T(f)$ aussi dérivable sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R} \quad T(f)'(x) = f(x+1) - f(x)$ continue sur $\mathbb{R}$ car f l'est aussi donc $T(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

II.2. .

II.2.1 T est un endomorphisme de E parceque linéaire et $\forall f \in E$ on a aussi $T(f) \in E$.

II.2.2 T ne peut pas être une application surjective parceque $\forall f \in E \quad T(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$, en particulier les applications qui ne sont pas de classe $\mathcal{C}^1$ ne peuvent pas avoir des antécédants par T .

II.3

II.3.1 Puisque f est une application de E, bornée sur $\mathbb{R}$, alors $\exists M \geq 0$ tel que $|f(t)| \leq M \quad \forall t \in \mathbb{R}$ et donc

$\forall x \in \mathbb{R}$ on a $|T(f)(x)| = |\int_{x-1}^{x+1} f(t)dt| \leq \int_{x-1}^{x+1} |f(t)|dt \leq \int_{x-1}^{x+1} Mdt = 2M$ donc $T(f)$ est également une application bornée sur R .

II.3.2 D'aprés le TAF $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \exists c \in \mathbb{R}$ tel que : $|T(f)(x) - T(f)(y)| = |T(f)'(c)||x-y|$ $= |f(c+1) - f(c-1)||x-y| \leq |f(c+1)| + |f(c-1)||x-y| \leq 2M|x-y|$, prendre $K = 2M$.

II.4 Si f est une fonction a-périodique de E alors $\forall t \in \mathbb{R} \quad f(t+a) = f(t)$ donc $\forall x \in \mathbb{R} \quad T(f)(x+a) = \int_{x+a-1}^{x+a+1} f(t)dt = \int_{x-1}^{x+1} f(u+a)du = \int_{x-1}^{x+1} f(u)du = T(f)(x)$, on a effectué içi le changement de variable $u = t - a$ donc $T(f)$ est aussi une fonction périodique sur $\mathbb{R}$.

II.5 Si f était paire alors $\forall u \in \mathbb{R} \quad f(-u) = f(u)$ et donc

$\forall x \in \mathbb{R} \quad T(f)(-x) = \int_{-x-1}^{-x+1} f(t)dt = -\int_{x+1}^{x-1} f(-u)du = T(f)(x)$, donc $T(f)$ est aussi paire, on a effectué içi le changement de variable $u = -t$, en effectuant le même changement de variable on montre aussi que si f est impaire alors $T(f)$ est aussi impaire. Donc la parité de $T(f)$ est la même que celle de f .

Troisiéme partie : étude de restrictions.

III.1.

III.1.1. $\mathcal{B} = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4)$ est déja par définition de F_ω une famille génératrice de ce dernier pour montrer que c'est une base il suffit de montrer qu'elle est libre. En effet soit $(\alpha-1, \ldots, \alpha_4) \in \mathbb{R}^4$ tel que $\alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2 + \alpha_3\varphi_3 + \alpha_4\varphi_4 = 0$ donc $\forall x \in \mathbb{R}, \alpha_1 \cos(\omega x) + \alpha_2 \sin(\omega x) + \alpha_3 x \cos(\omega x) + \alpha_4 x \sin(\omega x) = 0$, pour $x = 0$ on trouve $\alpha_1 = 0$, pour $x = \frac{\pi}{\omega}$ on trouve $\alpha_3 = 0$, pour $x = \frac{\pi}{2\omega}$ et

$x=-\frac{\pi}{2\omega}$ on trouve le systéme $\begin{cases} \alpha_2+\frac{\pi}{2\omega}\alpha_4=0 \\ -\alpha_2+\frac{\pi}{2\omega}\alpha_4=0 \end{cases}$, donc $\alpha_2=\alpha_4=0$. Donc $\mathcal{B}$ est libre dans F_ω .
D'où $\mathcal{B}$ est une base F_ω .

III.1.2. Pour simplifier les calculs on va utiliser une intégration complexe.

$\forall x\in\mathbb{R}\quad T(\varphi_1)(x)+iT(\varphi_2)(x)=\displaystyle\int_{x-1}^{x+1}e^{i\omega t}dt=\left[\frac{e^{i\omega t}}{i\omega}\right]_{x-1}^{x+1}=$
$\dfrac{e^{i\omega}-e^{-i\omega}}{i\omega}e^{i\omega x}=2\sin\omega\varphi_1(x)+i2\sin\omega\varphi_2(x)$, d'où $T(\varphi_1)=2\sin\omega\varphi_1;T(\varphi_2)=2\sin\omega\varphi_2$.

De même $\forall x\in\mathbb{R}\quad T(\varphi_3)(x)+iT(\varphi_4)(x)=\displaystyle\int_{x-1}^{x+1}te^{i\omega t}dt=\left[t\frac{e^{i\omega t}}{i\omega}\right]_{x-1}^{x+1}-\int_{x-1}^{x+1}\frac{e^{i\omega t}}{i\omega}$
$=2\dfrac{\omega\cos\omega-\sin\omega}{\omega^2}\sin\omega x+2\dfrac{\sin\omega}{\omega}x\cos\omega x+i\left(2\dfrac{\sin\omega-\omega\cos\omega}{\omega^2}\cos\omega x+2\dfrac{\sin\omega}{\omega}x\sin\omega x\right)$
$=2\dfrac{\omega\cos\omega-\sin\omega}{\omega^2}\varphi_2(x)+2\dfrac{\sin\omega}{\omega}\varphi_3(x)+i\left(2\dfrac{\sin\omega-\omega\cos\omega}{\omega^2}\varphi_1(x)+2\dfrac{\sin\omega}{\omega}\varphi_4(x)\right)$.

Donc $T(\varphi_3)=2\dfrac{\omega\cos\omega-\sin\omega}{\omega^2}\varphi_2+2\dfrac{\sin\omega}{\omega}\varphi_3;T(\varphi_4)=2\dfrac{\sin\omega-\omega\cos\omega}{\omega^2}\varphi_1+2\dfrac{\sin\omega}{\omega}\varphi_4$.

$\mathcal{B}=\varphi_1,\dots,\varphi_4$ est une base de F_ω donc $T(\mathcal{B})=T(\varphi_1),\dots,T(\varphi_4)$ est une famille génératrice de $T(F_\omega)$ or $T(\varphi_i)\in F_\omega$ pour tout $1\le i\le 4$ donc $T(F_\omega)\subset F_\omega$.

III.2 D'aprés les formules précédentes on a :

$$M_\omega=\begin{pmatrix} 2\sin\omega & 0 & 0 & 2\dfrac{\sin\omega-\omega\cos\omega}{\omega^2} \\ 0 & 2\sin\omega & 2\dfrac{\omega\cos\omega-\sin\omega}{\omega^2} & 0 \\ 0 & 0 & 2\dfrac{\sin\omega}{\omega} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\dfrac{\sin\omega}{\omega} \end{pmatrix}$$

III.2.1. Si $\sin\omega\neq 0$ alors M_ω est une matrice triangulaire dont les termes diagonaux sont tous non nuls donc inversible et par suite $\mathrm{rg}M_\omega=4$, si $\sin\omega=0$ alors M_ω admet deux colonnes nulles et les deux autres qui restent ne sont pas proportionnels donc $\mathrm{rg}M_\omega=2$.

III.2.2. Si $\sin\omega\neq 0$ alors M_ω est inversible donc $\mathrm{Ker}M_\omega=0$,
si $\sin\omega=0$ alors $\mathrm{Ker}M_\omega=\left\{(a,b,0,0)\text{ tel que : }(a,b)\in\mathbb{R}^2\right\}$.

III.2.3. D'aprés la question précédente T_ω est-il injectif si et seulement si $\sin\omega\neq 0$.

FIN