

Contrôle N°8
Mercredi le: 30 Avril 2003
Fonctions a deux variables

Duréé: 1h30

1. Resoudre les equations différentielles suivantes en utilisant les changements de variables donnés

a. (0.75) $x \frac{\partial f}{\partial x} - y \frac{\partial f}{\partial y} = f, (x = r \cos(\theta), y = r \sin(\theta))$

b. (1.5) $xy \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + (y^2 - x^2) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - xy \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + y \frac{\partial f}{\partial x} - x \frac{\partial f}{\partial y} = 0, (x = r \cos(\theta), y = r \sin(\theta))$

c. (0.75) $\left(x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} \right) f + x^2 + y^2 = 0, (u = \frac{y}{x}, v = x^2 + y^2)$

d. (1.5) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + x \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial f}{\partial y} = 0, (x = uv, y = u + v)$

2. Calculer les integrales doubles suivants:

a. (0.5) $\iint_D \frac{dx dy}{(1+x+y)^3}, D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$

b. (0.5) $\iint_D \frac{x^2 + y^2}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} dx dy, D = \{(x = r \cos(\theta), y = r \sin(\theta)) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 1\}$

3. Soit $\lambda > 1$, on pose $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x > 0\}$ et $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x > 0, y \neq 0\}$, on se propose d'étudier les extremums de la fonction $f(x, y) = x^\lambda y - y^2 - y \ln(x + 1) + 1$.

a. (0.5) pour $x > 0$ on pose $f(x) = x^\lambda - \ln(x + 1)$, montrer que l'équation $f'(x) = 0$ admet une seule solution $b \in]0, +\infty[$.

b. (0.5) on pose $f(b) = 2c$, montrer que $c < 0$.

c. (0.5) montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution $a \in]0, +\infty[$ et que $a > b$.

d. (0.5) déterminer les points critiques de f (on les exprimera en fonction de a, b, c).
montrer que f admet un seul extremum, que l'on précisera.

4. Soit $\lambda \geq 0$ on pose $I(\lambda) = \iint_D e^{-(x^2+y^2)} dx dy, D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } 0 \leq x \leq y \leq \lambda\}$

a. (0.5) Montrer que $I(\lambda) = J(\lambda)$ où $J(\lambda) = \int_0^\lambda e^{-x^2} dx$

b. (0.5) Montrer que $I(\lambda) = \frac{\pi}{8} - \frac{K(\lambda)}{2}$ où $K(\lambda) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\lambda^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt$ (indication: poser $x = u, y = tu$)

c. (0.5) Déterminer $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} K(\lambda)$

d. (0.5) En déduire que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$