MPSI 1 **2002-2003**

CPGE Agadir

Controle N°8

Mercredi le:30 Avril 2003

Fonctions a deux variables

Duréé:1h30

1. Resoudre les equations différentielles suivantes en utilisant les changements de variables donnés
   - **a**. (0.75)$x\frac{\partial f}{\partial x} - y\frac{\partial f}{\partial y} = f, (x = r\cos(\theta), y = r\sin(\theta))$
   - **b**. (1.5)$xy\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + (y^2 - x^2)\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} - xy\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + y\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial y} = 0, (x = r\cos(\theta), y = r\sin(\theta))$
   - **c**. (0.75)$\left(x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}\right)f + x^2 + y^2 = 0, (u = \frac{y}{x}, v = x^2 + y^2)$
   - **d**. (1.5)$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + x\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + y\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial f}{\partial y} = 0, (x = uv, y = u + v)$
2. Calculer les integrales doubles suivants:
   - **a**. (0.5)$\iint_D \frac{dxdy}{(1+x+y)^3}, D = \left\{(x,y) \in IR^2 \text{ tels que } x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\right\}$
   - **b**. (0.5)$\iint_D \frac{x^2+y^2}{x+\sqrt{x^2+y^2}}dxdy, D = \left\{(x = r\cos(\theta), y = r\sin(\theta)) \in IR^2 \text{ tels que } 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq\right.$
3. Soit $\lambda > 1$, on pose $H = \{(x,y) \in IR2/x > 0\}$ et $D = \{(x,y) \in IR^2/x > 0, y \neq 0\}$, on se propose d'étudier les extremums de la fonction $f(x,y) = x^\lambda y - y^2 - yln(x+1) + 1$.
   - **a**. (0.5)pour $x > 0$ on pose $f(x) = x^\lambda - ln(x+1)$, montrer que l'équation$f'(x) = 0$ admet une seule solution $b \in]0, +\infty[$.
   - **b**. (0.5)on pose $f(b) = 2c$, montrer que $c < 0$.
   - **c**. (0.5)montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution $a \in]0, +\infty[$ et que $a > b$.
   - **d**. (0.5)déterminer les points critiques de f(on les exprimera en fonction de a, b, c).b. montrer que$f$admet un seul extremum , que l'on précisera.
4. Soit $\lambda \geq 0$ on pose $I(\lambda) = \iint_D e^{-(x^2+y^2)}dxdy, D = \left\{(x,y) \in IR^2 \text{ tel que } 0 \leq x \leq y \leq \lambda\right\}$
   - **a**. (0.5)Montrer que $I(\lambda) = J(\lambda)$ où $J(\lambda) = \int_0^\lambda e^{-x^2}dx$
   - **b**. (0.5)Montrer que $I(\lambda) = \frac{\pi}{8} - \frac{K(\lambda)}{2}$ où $K(\lambda) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\lambda^2(1+t^2)}}{1+t^2}dt$ (*indication*: poser $x = u, y = tu$)
   - **c**. (0.5)Determiner $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} K(\lambda)$
   - **d**. (0.5)En deduire que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$