Devoir Libre : *Fonctions à deux variables*

MPSI-Maths.
Mr Mamouni : *myismail1@menara.ma*

Source disponible sur :
©http://www.chez.com/myismail

On pose :
$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } x > 0, y > 0\}$. $r = \sqrt{x^2+y^2}, t = \dfrac{y}{x}$ et $f(x,y) = g(r,t)$, on admet que si f est de classe C^2 sur D alors g l'est aussi, et on pose enfin $Tf(x,y) = x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$, et pour tout $a \in \mathbb{R}$: $N_a = \{f \in C^1(D) \text{ tel que } Tf - af = 0\}$.

1) Montrer que D est un ouvert.

2) Si $(f,h) \in C^1(D) \times C^2(D)$, exprimer $T(fh)$ en fonction de f, h, Tf et Th.

3) Si $(f,\varphi) \in C^1(D) \times C^2(\mathbb{R})$, donner l'expression de $T(\varphi \circ f)$.

4) Exprimer Tf en fonction de $\dfrac{\partial g}{\partial r}, \dfrac{\partial g}{\partial t}, r, t$.

5) Calculer Tt.

6) Montrer que si $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^{+*})$ alors $\varphi \circ t \in N_0$.

7) En déduire la forme générale des fonctions $f \in N_0$.

8) Calculer Tr.

9) Montrer que $f \in N_0 \iff rf \in N_1$, en déduire la forme générale des fonctions $f \in N_1$.

10) Pour $a \in \mathbb{R}$, calculer $t(r^a)$, en déduire la forme générale des fonctions $f \in N_a$.

11) On se propose dans la suite de résoudre l'équation : (*) $Tf - af = bh$ où $h \in N_b$.

a) On suppose d'abord que : $a = b$
Montrer que (*) admet une solution particulière f_0 de la forme $f_0 = \varphi(r)h$ où $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^{+*})$ que l'on explicitera, en déduire la forme générale des solutions de (*).

b) On suppose maintenant que : $a \neq b$
Montrer que (*) admet une solution particulière f_0 de la forme $f_0 = \lambda h$ où λ est une constante que l'on explicitera ; en déduire la forme générale des solutions de (*).

12) Résoudre les équations suivants :

a) $x\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) - f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2-xy}{x^2+y^2+xy}$.

b) $x\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) - 2f(x,y) = \dfrac{(x^2+y^2)(x-y)}{x+y}$.

Fin.