بِسمِ اللّهِ الرَّحمَنِ الرَّحِيمِ
وَ عَلَى اللّهِ فَلْيَتَوَكَّلِ المُتَوَكِّلُون

صَدَقَ اللّهُ العَظِيم

Corrigé DS1 (08-09): *Dérivées, primitives Fonctions usuelles*

HX5-MPSI, CPGE My Youssef, Rabat

Mercredi 29 Octobre 2008

Durée : 3 heures

Blague du jour :
Un mathématicien, un physicien et un biologiste sont dans un train au Maroc. Par la fenêtre, ils aperçoivent un mouton noir.
-Comme c'est intéressant, s'exlame le biologiste, au Maroc, les moutons sont noirs !
- On ne peut pas dire ça, réplique le physicien. Certes, il existe au moins un mouton noir en Irlande.
- Allons, allons, continue le mathématicien, la seule chose que l'on puisse affirmer, c'est qu'il existe au moins un mouton, dont au moins un côté du mouton est noir !

Mathématicien du jour : Machin
John Machin (1680 - 1751) est un mathématicien anglais, connu principalement pour avoir calculé en 1706, 100 décimales de π grâce à la formule qui porte son nom : $\frac{\pi}{4} = 4\arctan\frac{1}{5} - \arctan 1239$. Malgré un nom de famille très drôle, John Machin a enseigné les mathématiques à Brook Taylor. Il était aussi professeur d'astronomie, secrétaire de la Royal Society et membre de la commission qui décida de la priorité de Calcul entre Leibniz et Newton en 1712.

PROBLÈME I. ***source : François Dehame, PCSI, France.***

PARTIE A :

A.1. On a $f_n'(x) = \frac{x^{n-1}e^{-x}}{n!}(n-x)$, donc f_n est croissante sur $[0,n]$ et décroissante sur $[n,+\infty[$ avec $f_n(0) = \lim_{x\to+\infty} f_n(x) = 0$.

A.2. On calcule $f_n(x) - f_{n-1}(x) = \frac{x^{n-1}e^{-x}}{n!}(x-n) = -f_n'(x)$ donc• C_n est au-dessous de C_{n-1} sur l'intervalle $]0,n[$;• C_n est au-dessus de C_{n-1} sur l'intervalle $]n,+\infty[$.Les courbes C_n et C_{n-1} se rencontrent à l'origine O et au point d'abscisse n, ce qui veut dire que $f_n(n) = f_{n-1}(n)$.

PARTIE B :

B.1. En utilisant la question **A.2.** et la décroissance de la fonction f_{n-1} sur l'intervalle $[n-1,+\infty[$, on obtient

$$u_n = f_n(n) = f_{n-1}(n)f_{n-1}(n-1) = u_{n-1}\ ,$$

donc la suite u est décroissante. Comme elle est à valeurs positives, elle est minorée (par 0), donc elle converge.

B.2. Posons $g(t) = \ln(1+t) - t + \frac{t^2}{4}$ pour $t \in [0,1]$. On calcule $g'(t) = \frac{t(t-1)}{2(1+t)}$, expression négative pour $t \in [0,1]$, donc g est décroissante sur cet intervalle. Comme $g(0) = 0$, il en résulte que $g(t)0$ pour $t \in [0,1]$, ce qui est l'inégalité demandée.

Si $n1$, on a $\frac{1}{n} \in [0,1]$ et on peut appliquer l'inégalité ci-dessus avec $t = \frac{1}{n}$; cela donne $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \frac{1}{n} - \frac{1}{4n^2}$, ou encore $n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) 1 - \frac{1}{4n}$ et, en prenant l'exponentielle (fonction croissante, donc conservant le sens des inégalités), on trouve $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n e^{1-\frac{1}{4n}}$.

B.3. On a $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^{n+1}e^{-(n+1)}}{(n+1)!} \frac{n!}{n^n e^{-n}} = \frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ après quelques simplifications. La majoration de la question précédente donne immédiatement $\frac{u_{n+1}}{u_n} e^{-\frac{1}{4n}}$.

On a $u_1 = f_1(1) = e^{-1}$ et, pour $n2$, on écrit $u_n = u_1 \times \frac{u_2}{u_1} \times \ldots \times \frac{u_{n-1}}{u_{n-2}} \times \frac{u_n}{u_{n-1}}$ et en multipliant membre à membre les inégalités (entre termes positifs) $\frac{u_{k+1}}{u_k} e^{-\frac{1}{4k}}$ pour $k \in ent1, n-$ 1ent, *onobtientl'inégalitédemandée.*

B.4. Par la relation de Chasles, on a $\int_1^n \frac{dt}{t} = \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{dt}{t}$ et, la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ étant décroissante sur $^*_+$, on a $\int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \frac{1}{k}$ (s'aider éventuellement d'un schéma) pour tout $k \in ent1, n-$ 1ent*donc, ensommantcesinégalités,*** **$\int_1^n \frac{dt}{t} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$, ce qu'il fallait prouver.**

De cette dernière inégalité et de la question B.3., on déduit

$$0 u_n \exp\left(-1 - \frac{1}{4}\int_1^n \frac{dt}{t}\right) = e^{-1-\frac{1}{4}\ln n} = \frac{1}{e\sqrt[4]{n}} \ .$$

Comme $\lim_{n\to+\infty} e^{-1-\frac{1}{4}\ln n} = 0$, il en résulte que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

PARTIE C :

C.1. Une intégration par parties donne $I_1(a) = \int_0^a t\, e^{-t}\, dt = 1 - (a+1)e^{-a}$.

C.2. Puisque $e^{-t} \in [0,1]$ pour $t0$, l'encadrement $0 f_n(t) \frac{t^n}{n!}$ est immdiat. On en déduit

$$0 I_n(a) \int_0^a \frac{t^n}{n!}\, dt = \left[\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}\right]_0^a = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} \ .$$

C.3. La suite (u_n) est décroissante d'après la question B.1., donc $u_n u_1$ pour tout $n \in^*$, c'est-à-dire $\frac{n^n e^{-n}}{n!} \frac{1}{e}$ donc a fortiori $\frac{n^n e^{-n}}{n!} < 1$ ou encore $\frac{1}{n!} < \left(\frac{e}{n}\right)^n$.

De l'encadrement de la question C.2., on déduit alors

$$0 I_n(a) < \left(\frac{ae}{n+1}\right)^{n+1} \ ,$$

donc $\lim_{n\to+\infty} I_n(a) = 0$ puisque le majorant tend vers zéro lorsque n tend vers $+\infty$: *en effet,* $\ln\left[\left(\frac{ae}{n+1}\right)^{n+1}\right] = (n+1)\big[\ln(ae) - \ln(n+1)\big]$ *tend vers $-\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$.*

C.4. Il est commode d'utiliser ici la relation $f_n - f_{n-1} = -f'_n$ observée à la question B.1. : en intégrant cette relation sur l'intervalle $[0,a]$, on obtient alors

$$I_n(a) - I_{n-1}(a) = -\int_0^a f'_n(t)\, dt = -[f_n(t)]_0^a = -f_n(a) \ ,$$

soit $I_n(a) = I_{n-1}(a) - \frac{a^n e^{-a}}{n!}$.

C.5. En sommant les relations $I_k(a) = I_{k-1}(a) - \frac{a^k e^{-a}}{k!}$ pour k de 2 à n et en simplifiant, on obtient

$$\begin{aligned} I_n(a) &= I_1(a) - \frac{a^2e^{-a}}{2!} - \frac{a^3e^{-a}}{3!} - \ldots - \frac{a^ne^{-a}}{n!} \\ &= 1-(a+1)e^{-a} - e^{-a}\left(\frac{a^2}{2!}+\frac{a^3}{3!}+\ldots+\frac{a^n}{n!}\right) \\ &= 1-e^{-a}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{a^k}{k!}\right). \end{aligned}$$

C.6. La relation ci-dessus peut s'écrire $\sum_{k=0}^{n}\frac{a^k}{k!} = e^a\big(1-I_n(a)\big)$. Comme $\lim_{n\to+\infty} I_n(a) = 0$ (question C.3.), on obtient $\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{a^k}{k!}\right) = e^a$.

On écrit ce résultat sous la forme $e^a = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{a^k}{k!}$.

Problème II. ***source : Union des professeurs des CPGE Agronomie.***

Dans ce problème, on considère $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $f : [0;a] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et strictement croissante sur $[0;a]$, dérivable dans l'intervalle $]0;a[$ et telle que $f(0)=0$. La fonction f est alors bijective de $[0;a]$ dans $[0;f(a)]$ et admet une réciproque, notée g. On remarquera que g est continue sur l'intervalle $[0;f(a)]$ et strictement croissante sur cet intervalle.

1) **a)** ***Dans les deux premières questions, on montre que, pour tout réel $\alpha \in [0;a]$, on a la relation (1) définie par $\int_0^{\alpha} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^{f(\alpha)} g(y)\,\mathrm{d}y = \alpha f(\alpha)$.***

i. ***Justifier que l'on a $g(0)=0$.***

On sait que $f(0)=0$ donc le seul antécédent de 0 par f est 0, ce qui prouve que

$$\boxed{g(0)=0.}$$

ii. ***Exemple : On prend $f(x)=x^p$ avec $p\in\mathbb{R}_+^*$. Vérifier la relation (1).***

La fonction $f(x)=x^p$ réalise une bijection de $[0;a]$ sur $[0;a^p]$ dont la réciproque est définie par $g(y)=\sqrt[p]{y}$. Alors, pour tout α tel que $0\le\alpha\le a$,

$$\begin{aligned} \int_0^{\alpha} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^{f(\alpha)} g(y)\,\mathrm{d}y &= \int_0^{\alpha} x^p\,\mathrm{d}x + \int_0^{\alpha^p}\sqrt[p]{y}\,\mathrm{d}y = \Big[\frac{x^{p+1}}{p+1}\Big]_0^{\alpha} + \Big[\frac{py\sqrt[p]{y}}{p+1}\Big]_0^{\alpha^p} \\ &= \frac{\alpha^{p+1}}{p+1} + \frac{p\alpha^{p+1}}{p+1} = \alpha^{p+1} = \alpha f(\alpha), \end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\text{si } f(x)=x^p\text{, la relation (1) est vraie.}}$$

b) ***Pour tout réel $\alpha\in[0;a]$, on note $\varphi(\alpha) = \int_0^{\alpha} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^{f(\alpha)} g(y)\,\mathrm{d}y - \alpha f(\alpha)$.***

i. ***Exprimer la fonction φ à l'aide de f et de primitives de f et g.***

Si F désigne la primitive de f qui s'annule en 0 et si G est la primitive de g qui s'annule en 0, alors

$$\boxed{\varphi(\alpha) = F(\alpha) + G\big(f(\alpha)\big) - \alpha f(\alpha).}$$

ii. ***En déduire que la fonction φ ainsi définie est continue sur $[0;a]$.***

La formule de la question précédente nous permet de voir que φ est la somme et la composée de fonctions continues donc, en vertu des théorèmes généraux de continuité,

$$\boxed{\varphi \text{ est continue sur } [0;a].}$$

iii. ***Montrer que φ est dérivable sur $]0;a[$, de dérivée nulle sur $]0;a[$ et en déduire que φ est constante sur $[0;a]$.***

La formule de la question (i) nous permet de voir que φ est la somme et la composée de fonctions dérivables donc, en vertu des théorèmes généraux de dérivabilité,

$$\boxed{\varphi \text{ est dérivable sur }]0;a[.}$$

De plus, pour tout α vérifiant $0 < \alpha < a$, on a

$$\varphi'(\alpha) = f(\alpha) + f'(\alpha)g\big(f(\alpha)\big) - f(\alpha) - \alpha f'(\alpha) = f(\alpha) + f'(\alpha)\alpha - f(\alpha) - \alpha f'(\alpha) = 0,$$

où l'on a utilisé le fait que $g\big(f(\alpha)\big) = \alpha$, donc

$$\boxed{\varphi \text{ est de dérivée nulle sur }]0;a[.}$$

Comme $]0;a[$ est un intervalle, on en déduit que φ est constante sur $]0;a[$. Comme φ est continue sur $[0;a]$, on peut en déduire que

$$\boxed{\varphi \text{ est constante sur } [0;a].}$$

iv. ***Vérifier que $\varphi(0) = 0$ et en déduire l'égalité (1).***

Comme $f(0) = 0$, on a

$$\varphi(0) = \int_0^0 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^{f(0)} g(y)\,\mathrm{d}y - 0 \times f(0) = 0,$$

donc

$$\boxed{\varphi(0) = 0.}$$

Comme φ est constante sur $[0;a]$ et nulle en 0, on sait que φ est nulle sur $[0;a]$, ce qui revient à dire que

$$\boxed{\text{la relation } (1) \text{ est vraie.}}$$

2) a) ***Dans cette question, on applique la formule précédente au calcul de $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \sqrt{\tan x}\,\mathrm{d}x$.***

i. ***Soit $P(x) = x^4 + 1$. Montrer que $P(x) = (x^2 + x\sqrt{2} + 1)(x^2 - x\sqrt{2} + 1)$ et en déduire que $\dfrac{x^2}{x^4+1} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}\Big(\dfrac{x}{x^2 - x\sqrt{2}+1} - \dfrac{x}{x^2 + x\sqrt{2}+1}\Big)$.***

On a $P(x) = x^2 + 1 + 2x^2 - 2x^2 = (x^2+1)^2 - 2x^2 = (x^2 + x\sqrt{2} + 1)(x^2 - x\sqrt{2} + 1)$, donc

$$\boxed{P(x) = (x^2 + x\sqrt{2} + 1)(x^2 - x\sqrt{2} + 1).}$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{2}}{4}\Big(\frac{x}{x^2 - x\sqrt{2}+1} - \frac{x}{x^2 + x\sqrt{2}+1}\Big) &= \frac{\sqrt{2}}{4}\,\frac{x(x^2 + x\sqrt{2}+1) - x(x^2 - x\sqrt{2}+1)}{(x^2 - x\sqrt{2}+1)(x^2 + x\sqrt{2}+1)} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{4}\,\frac{2\sqrt{2}x^2}{x^4+1},
\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\frac{x^2}{x^4+1} = \frac{\sqrt{2}}{4}\Big(\frac{x}{x^2 - x\sqrt{2}+1} - \frac{x}{x^2 + x\sqrt{2}+1}\Big).}$$

ii. ***Montrer que*** $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{x^4+1}\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{2}}{4}\int_{-1}^1 \frac{x}{x^2-x\sqrt{2}+1}\mathrm{d}x$ ***en utilisant un changement de variable.***

D'après la relation précédente, on a

$$\int_0^1 \frac{x^2}{x^4+1}\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{2}}{4}\int_0^1 \frac{x}{x^2-x\sqrt{2}+1}\mathrm{d}x - \frac{\sqrt{2}}{4}\int_0^1 \frac{x}{x^2+x\sqrt{2}+1}\mathrm{d}x.$$

En effectuant alors le changement de variable $u=-x$ **dans la seconde intégrale, il vient**

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x^2}{x^4+1}\mathrm{d}x &= \frac{\sqrt{2}}{4}\int_0^1 \frac{x}{x^2-x\sqrt{2}+1}\mathrm{d}x - \frac{\sqrt{2}}{4}\int_0^{-1} \frac{u}{u^2-u\sqrt{2}+1}(-\mathrm{d}u)\\ &= \frac{\sqrt{2}}{4}\int_0^1 \frac{x}{x^2-x\sqrt{2}+1}\mathrm{d}x - \frac{\sqrt{2}}{4}\int_{-1}^{0} \frac{x}{x^2-x\sqrt{2}+1}\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\int_0^1 \frac{x^2}{x^4+1}\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{2}}{4}\int_{-1}^1 \frac{x}{x^2-x\sqrt{2}+1}\mathrm{d}x.}$$

iii. ***En déduire que*** $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{x^4+1}\mathrm{d}x = \left(\sqrt{2}\ln(3-2\sqrt{2})+\sqrt{2}\pi\right)/8$. ***On pourra utiliser le changement de variable*** $u = x\sqrt{2}-1$ ***ainsi que la formule valable pour tout réel*** x ***strictement positif :*** $\arctan x + \arctan(1/x) = \pi/2$.

En posant $u = x\sqrt{2}-1$ **dans l'intégrale** $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{x}{x^2-x\sqrt{2}+1}\mathrm{d}x$**, il vient**

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 \frac{x}{x^2-x\sqrt{2}+1}\mathrm{d}x &= \int_{-1}^1 \frac{2x}{(\sqrt{2}x-1)^2+1}\mathrm{d}x\\ &= \int_{-\sqrt{2}-1}^{\sqrt{2}-1} \frac{\sqrt{2}(u+1)}{u^2+1}\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{2}}\\ &= \int_{-\sqrt{2}-1}^{\sqrt{2}-1} \frac{u+1}{u^2+1}\mathrm{d}u\\ &= \left[\frac{\ln|u^2+1|}{2}+\arctan u\right]_{-\sqrt{2}-1}^{\sqrt{2}-1}\\ &= \frac{1}{2}\ln\frac{4-2\sqrt{2}}{4+2\sqrt{2}} + \arctan(\sqrt{2}-1)+\arctan(\sqrt{2}+1)\\ &= \frac{1}{2}\ln\underbrace{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}}_{=3-2\sqrt{2}} + \underbrace{\left(\arctan(\sqrt{2}-1)+\arctan\frac{1}{\sqrt{2}-1}\right)}_{=\pi/2}\\ &= \frac{1}{2}\ln(3-2\sqrt{2})+\frac{\pi}{2},\end{aligned}$$

donc, d'après la formule de la question précédente,

$$\boxed{\int_0^1 \frac{x^2}{x^4+1}\mathbf{d}x = \frac{\sqrt{2}}{8}\ln(3-2\sqrt{2})+\frac{\sqrt{2}\pi}{8}\cdot}$$

b) ***Dans cette question,*** f_0 ***désigne la fonction, définie sur*** $[0;\pi/4]$, ***par*** $f_0(x)=\sqrt{\tan x}$.

i. ***Montrer que*** f_0 ***est strictement croissante sur*** $[0;\pi/4]$, ***continue sur*** $[0;\pi/4]$ ***et dérivable sur*** $]0;\pi/4[$. ***Jusitifier l'existence de la fonction*** ${f_0}^{-1}$ ***et donner l'expression de cette fonction réciproque.***

La fonction f_0 est strictement croissante sur $[0;\pi/4]$ (respectivement continue sur $[0;\pi/4]$, respectivement dérivable sur $]0;\pi/4[$) comme composée de fonctions strictement croissantes sur $[0;\pi/4]$ (respectivement continues sur $[0;\pi/4]$, respectivement dérivables sur $]0;\pi/4[$). Comme $f([0;\pi/4]) = [0;1]$, le théorème de la bijection permet alors d'affirmer que f_0 admet une fonction réciproque ${f_0}^{-1}$ définie de $[0;1]$ vers $[0;\pi/4]$ telle que, pour tout $y \in [0;1]$, $\sqrt{\tan x} = y$ où $x = {f_0}^{-1}(y)$. Or $\sqrt{\tan x} = y \iff \tan x = y^2 \iff x = \arctan(y^2)$ car $x \in [0;\pi/4]$, donc ${f_0}^{-1}(y) = \arctan(y^2)$. Pour résumer,

la fonction f_0 est strictement croissante sur $[0;\pi/4]$, continue sur $[0;\pi/4]$, dérivable sur $]0;\pi/4[$, bijective de $[0;\pi/4]$ vers $[0;1]$. De plus, son application réciproque ${f_0}^{-1} : [0;1] \longrightarrow [0;\pi/4]$ est définie par ${f_0}^{-1}(y) = \arctan(y^2)$.

ii. ***Calculer $\displaystyle\int_0^1 \arctan(y^2)\,\mathrm{d}y$ par intégration par parties.***

Les fonctions $y \longmapsto y$ et $y \longmapsto \arctan(y^2)$ étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;1]$, on peut effectuer l'intégration par parties suivantes :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \arctan(y^2)\,\mathrm{d}y &= \big[y\arctan(y^2)\big]_0^1 - \int_0^1 \frac{2y^2}{1+y^4}\mathrm{d}y \\ &= \arctan 1 - 2\Big(\frac{\sqrt{2}}{8}\ln(3-2\sqrt{2}) + \frac{\sqrt{2}\pi}{8}\Big)\end{aligned}$$

où l'on utilisé le résultat de la question 2. a) iii. Donc

$$\boxed{\int_0^1 \arctan(y^2)\,\mathrm{d}y = \frac{(1-\sqrt{2})\pi}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}\ln(3-2\sqrt{2}).}$$

iii. ***En utilisant (1) et la question précédente, donner la valeur de $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \sqrt{\tan x}\,\mathrm{d}x$.***

La fonction f_0 satisfait toutes les hypothèses pour que l'on puisse lui appliquer la formule (1) avec $\alpha = a = \pi/4$. Il vient alors

$$\int_0^{\pi/4} \sqrt{\tan x}\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \arctan(y^2)\,\mathrm{d}y = \frac{\pi}{4}$$

car $f_0(\pi/4) = 1$. Il s'ensuit que

$$\int_0^{\pi/4} \sqrt{\tan x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \arctan(y^2)\,\mathrm{d}y,$$

ce qui donne, en vertu du résultat de la question précédente, que

$$\boxed{\int_0^{\pi/4} \sqrt{\tan x}\,\mathbf{d}x = \frac{\sqrt{2}}{4}\big(\pi + \ln(3-2\sqrt{2})\big).}$$

3) ***Dans cette question, on revient au cas général. α désigne un réel vérifiant $0 \le \alpha \le a$ et β un réel vérifiant $0 \le \beta \le f(a)$.***

a) ***Montrer, en distinguant deux cas selon la position relative de β et $f(\alpha)$, que l'on a $\displaystyle\int_{f(\alpha)}^{\beta} g(y)\,\mathrm{d}y \ge \alpha\big(\beta - f(\alpha)\big)$ puis que l'on a (2) : $\alpha\beta \le \displaystyle\int_0^{\alpha} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^{\beta} g(y)\,\mathrm{d}y$.***

Supposons que $f(\alpha) \le \beta$. Comme la fonction g est croissante sur l'intervalle $[0;f(a)]$, on a $\forall y \in [f(\alpha);\beta]\,,\ g\big(f(\alpha)\big) \le g(y)$, ce qui donne $\alpha \le g(y)$. La croissance de l'intégrale nous permet alors d'écrire que

$$\int_{f(\alpha)}^{\beta} g(y)\,\mathrm{d}y \ge \int_{f(\alpha)}^{\beta} \alpha\,\mathrm{d}y = \alpha\big(\beta - f(\alpha)\big).$$

Supposons que $f(\alpha) > \beta$. Comme la fonction g est croissante sur l'intervalle $[0; f(a)]$, on a $\forall y \in [\beta; f(\alpha)]\,,\ g\big(f(\alpha)\big) \geq g(y)$, ce qui donne $\alpha \geq g(y)$. La croissance de l'intégrale nous permet alors d'écrire que

$$\int_{f(\alpha)}^{\beta} g(y)\,\mathrm{d}y = \int_{\beta}^{f(\alpha)} \big(-g(y)\big)\,\mathrm{d}y \geq \int_{f(\alpha)}^{\beta} (-\alpha)\,\mathrm{d}y = \alpha\big(\beta - f(\alpha)\big).$$

Ainsi, dans tous les cas, on a

$$\boxed{\int_{f(\alpha)}^{\beta} g(y)\,\mathrm{d}y \geq \alpha\big(\beta - f(\alpha)\big).}$$

Par suite, on a

$$\begin{aligned}\int_0^{\alpha} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^{\beta} g(y)\,\mathrm{d}y &= \underbrace{\int_0^{\alpha} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^{f(\alpha)} g(y)\,\mathrm{d}y}_{=\alpha f(\alpha)\ \textbf{d'après}\ (1)} + \underbrace{\int_{f(\alpha)}^{\beta} g(y)\,\mathrm{d}y}_{\geq \alpha\{\beta - f(\alpha)\}}\\ &\geq \alpha f(\alpha) + \alpha\big(\beta - f(\alpha)\big),\end{aligned}$$

d'où

$$\boxed{\alpha\beta \leq \int_0^{\alpha} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^{\beta} g(y)\,\mathrm{d}y.}$$

b) ***Étudier sur $[0; f(a)]$ les variations de la fonction h définie, pour tout $t \in [0; f(a)]$, par la formule $h(t) = \alpha t - \int_0^t g(y)\,\mathrm{d}y$. Calculer la valeur de son maximum et retrouver ainsi la formule (2).***

La fonction h est dérivable sur $[0; f(a)]$ comme différence de deux fonctions dérivables sur $[0; f(a)]$ (la seconde fonction est une primitive de g qui est une fonction continue sur $[0; f(a)]$). De plus, pour tout $t \in [0; f(a)]$, on a $h'(t) = \alpha - g(t)$ donc $h'(t) \geq 0 \iff \alpha \geq g(t) \iff f(\alpha) \geq t$ puisque f est une fonction croissante. On obtient ainsi le tableau de variation suivant

t	0		$f(\alpha)$		$f(a)$
$h'(t)$		$+$	0	$-$	
$h(t)$	0		$h\big(f(\alpha)\big)$		$h\big(f(a)\big)$

Or, d'après la relation (1), on a

$$h\big(f(\alpha)\big) = \alpha f(\alpha) - \int_0^{f(\alpha)} g(y)\,\mathrm{d}y = \int_0^{\alpha} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

donc d'après les variations de h, on en déduit que

$$\forall t \in [0; f(a)]\,, \qquad h(t) \leq \int_0^{\alpha} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

ce qui donne pour $t = \beta$, $\alpha\beta - \int_0^{\beta} g(y)\,\mathrm{d}y \leq \int_0^{\alpha} f(x)\,\mathrm{d}x$, c'est-à-dire $\alpha\beta \leq \int_0^{\alpha} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^{\beta} g(y)\,\mathrm{d}y$.

Fin
à la prochaine