بِسمِ اللَّهِ الرَّحمَنِ الرَّحِيمِ
وَ عَلَى اللَّهِ فَليَتَوَكَّلِ المُتَوَكِّلُون

صَدَقَ اللَّهُ العَظِيم

DS 8 (07-08) : *Fonctions intégrables* *Fonctions à deux variables*

Mercrdi 07 Mai 2008.

Durée : 4 heures

Problème 1

Notations : Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x > 0, y > 0\}$ et f de classe $\mathcal{C}^2$ sur D. On pose $r = \sqrt{x^2 + y^2}, t = \dfrac{y}{x}$ et $g(r, t) = f(x, y)$, on admet que si g est aussi de classe $\mathcal{C}^2$ sur D. On pose aussi $Tf(x, y) = x\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)$, et pour tout $a \in \mathbb{R}$ on considère l'ensemble : $N_a = \{f \in \mathcal{C}^1(D)$ tel que $Tf - af = 0\}$.

1) Montrer que D est un ouvert.

2) Montrer que l'application, $T : f \longrightarrow T(f)$ est linéaire.

3) Si $(f, h) \in \mathcal{C}^1(D) \times \mathcal{C}^2(D)$, exprimer $T(fh)$ en à l'aide f, h, Tf et Th.

4) Si $(f, \varphi) \in \mathcal{C}^1(D) \times \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$, donner l'expression de $T(\varphi \circ f)$.

5) Exprimer Tf à l'aide de $\dfrac{\partial g}{\partial r}, \dfrac{\partial g}{\partial t}, r, t$.

6) Calculer Tt.

7) Montrer que si $\varphi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^{+*})$ alors $\varphi \circ t \in N_0$.

8) En déduire la forme générale des fonctions $f \in N_0$.

9) Calculer Tr.

10) Montrer que $f \in N_0 \Longleftrightarrow rf \in N_1$, en déduire la forme générale des fonctions $f \in N_1$.

11) Pour $a \in \mathbb{R}$, calculer $t(r^a)$, en déduire la forme générale des fonctions $f \in N_a$.

12) On se propose dans la suite de résoudre l'équation : (*) $Tf - af = bh$ où $h \in N_b$.

a) On suppose d'abord que : $a = b$
Montrer que (*) admet une solution particulière f_0 de la forme $f_0 = \varphi(r)h$ où $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^{+*})$ que l'on explicitera, en déduire la forme générale des solutions de (*).

b) On suppose maintenant que : $a \neq b$
Montrer que (*) admet une solution particulière f_0 de la forme $f_0 = \lambda h$ où λ est une constante que l'on explicitera ; en déduire la forme générale des solutions de (*).

13) Résoudre les équations suivants :

a) $x\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) - f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2-xy}{x^2+y^2+xy}$.

b) $x\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) - 2f(x,y) = \dfrac{(x^2+y^2)(x-y)}{x+y}$.

Problème 2

La constante d'Euler, la transformée de Laplace et la fonction de Bessel

Partie I : La constante d'Euler.

1) Montrer que les fonctions (u_n) et (v_n) définies par

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n, v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1), \forall n \geq 1$$

sont adjacentes, on notera γ, leur limite commune, appelèe la *constante d'Euler*, qu'on ne cherchera pas à calculer.

2) Montrer que la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1-(1-x)^n}{x}$ est intégrable sur $]0,1]$.

3) Montrer que f est une fonction polynômiale, préciser son degré ainsi que son coéfficient dominant.

4) Exprimer $f(x)$ en fonction de $1, x-1, \cdots, (x-1)^{n-1}$.

5) Calculer $\displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$ de deux façons puis en déduire que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}\mathcal{C}_n^k}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Partie II : La transformée de Laplace.

Une fonction continue $f : [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ est dite *d'ordre exponentiel si et seulement si* $\exists \alpha > 0$ tel que la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-\alpha t} f(t)$ soit bornée sur $[0,+\infty[$, dans ce cas pour tout $x > 0$, on définit *la transformée de Laplace* de f au point x par la relation suivante :

$$L(f)(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt} f(t)\mathrm{d}t$$

L'ensemble des fonctions dite d'ordre exponentiel se note $\mathcal{E}$.

1) Montrer que l'application $f(t) = t^n, n \geq 1$ est d'ordre exponentiel, alors que $g(t) = e^{t^2}$ ne l'est pas.

2) Montrer que $\mathcal{E}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

3) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t)dt$ est bien définie, et que l'application $f \mapsto L(f)$ est linéaire.

4) Calculer $L(f)(x)$ dans chacun des cas suivants :

a) $f(t) = t^n,\ n \geq 1$.

b) $f(t) = e^{-at},\ a > 0$.

c) $f(t) = t^n e^{-at}\ , a > 0, n \geq 1$.

d) $f(t) = e^{-at}\sin(bt),\ a, b > 0$.

e) $f(t) = e^{-at}\cos(bt),\ a, b > 0$.

5) Soit $f \in \mathcal{E}$ tel que $f' \in \mathcal{E}$, montrer que $L(f')(x) = xL(f)(x) - f(0),\ \forall x > 0$.

6) Soit $f \in \mathcal{E}$ tel que $f', f“ \in \mathcal{E}$, montrer que $L(f“)(x) = x^2L(f)(x) - xf'(0) - f''(0),\ \forall x > 0$.

7) Retrouver la formule de $L(f)(x)$ quanf $f(t) = t^n,\ n \geq 1$.

8) **Application**. Dans la suite du problème, on admettra que l'application $f \longmapsto L(f)$ est injective sur $\mathcal{E}$, et on se propose de résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} X'(t) = & X(t) + 2Y(t) \\ Y'(t) = & Y(t) + e^t \\ X(0) = & 0 \\ Y(0) = & 0 \end{cases}$$

Pour cela on pose $x(s) = L(X)(s)$ et $y(s) = L(Y)(s)$.

a) Écrire le système d'équations vérifiées par les fonctions x et y.

b) Résoudre ce système, puis en déduire $X(t)$ et $Y(t)$.

Partie III : La fonction de Bessel.

On admet dans cette partie qu'on peut dériver à l'intérieur d'une intégrale, et qu'on peut aussi permuter l'ordre d'intégration. Pour tout réel x, on pose

$$J(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(x\cos t)dt$$

1) Exprimer J' et $J“$ à l'aide d'intégrales.

2) Monter que $J'(x) = -\dfrac{x}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} \sin^2 t\cos(x\cos t)dt$, puis que J est solution de l'équation différentielle $xy“(x) + y'(x) + xy(x) = 0$.

3) Pour tout réel $x > 0$, on pose $I(x) = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{1}{x^2 + \cos^2 t}dt$.

a) Montrer que $I(x) = 2\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{x^2 + \cos^2 t}dt$.

b) Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{x^2+\cos^2 t}\mathrm{d}t$, à l'aide d'un changement de variable approprié, puis en déduire $I(x)$.

4) Calculer la transformée de Laplace de la fonction de Bessel J.

Partie IV : Transformée de Laplace de la fonction logarithmique.

Dans cette partie on admet qu'on peut permuter intégrales et limites.

1) Montrer que la fonction $g : t \longmapsto \mathrm{e}^{-t}\ln t$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

2) Pour tout réel $x>0$ et entier $n\in\mathbb{N}^*$, on pose : $\begin{cases} U_n(x) = & (1-\frac{x}{n})^n \ln x & \text{si } x\in]0,n] \\ \quad\quad\;\; = & 0 & \text{si } x\geq n \end{cases}$.

a) Pour $x>0$ fixé, calculer $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} U_n(x)$.

b) Montrer que $\forall x>0, \forall n\in\mathbb{N}^*,\ 0\leq |U_n(x)|\leq \mathrm{e}^{-x}|\ln x|$, puis en déduire que U_n est intégrable sur $]0,+\infty[$.

3) On pose $J_n = \displaystyle\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \ln t\mathrm{d}t$, justifier l'existence de J_n puis calculer sa limite.

4) Soit $(n,p)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$. Justifier l'intégrabilité de la fonction $t\longmapsto t^p\ln(nt)$ sur $]0,1]$ puis calculer $\displaystyle\int_0^1 t^p\ln(nt)\mathrm{d}t$.

5) Exprimer J_n en fonction de u_n.
Indication : On pourra utiliser la formule $(k+1)\mathcal{C}_{n+1}^{k+1} = (n+1)\mathcal{C}_n^k$ et la question 5 de la partie I.

6) En déduire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\ln t\mathrm{d}t$ en fonction de la constante d'Euler, γ.

7) Montrer que la transformée de Laplace de la fonction logarithme est bien définie pour tout $x>0$, puis la calculer.

$\boxed{\text{Fin.}}$