بِسمِ اللّهِ الرَّحمَنِ الرَّحِيمِ
وَ عَلَى اللّهِ فَليَتَوَكَّلِ المُتَوَكِّلُون

صَدَقَ اللّهُ العَظِيم

Corrig DS 8 (07-08) : Fonctions intÃ©grables Fonctions Ã deux variables

Mardi 06 Mai 2008.

Durée : 4 heures

Problème 1

1) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } f_1(x,y) > 0\} \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } f_2(x,y) > 0\}$ est un ouvert en tant qu'intersection de deux ouverts, car les fonctions $f_1(x,y) \longmapsto x$ et $f_2(x,y) \longmapsto y$ sont continues.

2) La linéarité de l'application $T : f \longrightarrow T(f)$ découle de celle des dérivées partielles.

3) $T(fh) = fT(h) + hT(f)$ car $\dfrac{\partial(fh)}{\partial x} = f\dfrac{\partial h}{\partial x} + h\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial(fh)}{\partial y} = f\dfrac{\partial h}{\partial y} + h\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

4) $T(\varphi \circ f) = (\varphi' \circ f)T(f)$ car $\dfrac{\partial(\varphi \circ f)}{\partial x} = (\varphi' \circ f)\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial(\varphi \circ f)}{\partial y} = (\varphi' \circ f)\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

5) D'aprés les formules du cours : $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = & \dfrac{\partial r}{\partial x}\dfrac{\partial g}{\partial r} + \dfrac{\partial t}{\partial x}\dfrac{\partial g}{\partial t} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = & \dfrac{\partial r}{\partial y}\dfrac{\partial g}{\partial r} + \dfrac{\partial t}{\partial y}\dfrac{\partial g}{\partial t} \end{cases}$, on en déduit que $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = & \dfrac{x}{r}\dfrac{\partial g}{\partial r} - \dfrac{y}{x^2}\dfrac{\partial g}{\partial t} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = & \dfrac{y}{r}\dfrac{\partial g}{\partial r} + \dfrac{\partial 1}{\partial x}\dfrac{\partial g}{\partial t} \end{cases}$,

d'où $T(f) = x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} = r\dfrac{\partial g}{\partial r}$.

6) $Tt = 0$, simple calcul.

7) $T(\varphi \circ t) = (\varphi' \circ)Tt = 0$, donc $\varphi \circ \in N_0$.

8) D'aprés ce qui précède, si $f = \varphi \circ t$, alors $f \in N_0$. Inversement soit $f \in N_0$, alors $T(f) = r\dfrac{\partial g}{\partial r} = 0$, donc $\dfrac{\partial g}{\partial r}(r,t) = 0$, donc $g(r,t) = \varphi(t)$, d'où $f(x,y) = g(r,t) = \varphi(t) = \varphi \circ t(x,y)$. Donc $\varphi \circ t$ est la forme générale des éléments de N_0.

9) $Tr = r$, simple calcul.

10) $rf \in N_1 \Longleftrightarrow T(rf) = rf \Longleftrightarrow rT(f) + fT(r) = rf \Longleftrightarrow T(f) = 0$ car $Tr = r$, ainsi $f \in N_1 \Longleftrightarrow \dfrac{1}{r}f \in \mathbb{N}_0 \Longleftrightarrow \dfrac{1}{r}f = \varphi \circ t \Longleftrightarrow f = r\varphi \circ t$, c'est la forme générale des fonctions $f \in N_1$.

11) Pour $a \in \mathbb{R}$, calculer $T(r^a) = T\left((x^2+y^2)^{\frac{a}{2}}\right) = ar^a$, de la même façon que précédement, on a $T(r^a f) = r^a T(f) + ar^a f$, donc $r^a f \in N_a \Longleftrightarrow f \in N_0$ et on en déduit que la forme générale des fonctions $f \in N_a$ est $f = r^a \varphi \circ t$.

12) (*) $Tf - af = bh$ où $h \in N_b$, donc $Th = bh$.

a) Supposons $a = b$, soit $f_0 = \varphi(r)h$ une solution particulière f_0 où $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^{+*})$, donc $Tf_0 = T((\varphi \circ r)h) = (\varphi \circ r)Th + hT(\varphi \circ r) = (\varphi \circ r)bh + h(\varphi' \circ r)Tr = bf + rh(\varphi' \circ r)$, ainsi $Tf_0 - af_0 = bh$ devient $(b-a)f_0 + rh(\varphi' \circ r) = h$, d'où $r\varphi'(r) = 1$, c'est une équation différentielle du 1èr ordre de solution $\varphi(r) = \ln r$. Soit f une solution générale de (*), comme l'est f_0 aussi, alors $T(f - f_0) - a(f - f_0) = 0$, d'où $f - f_0 \in N_a$, donc $f - f_0 = r^a\varphi \circ t$, d'où $f = f_0 + r^a\varphi \circ t = \ln r + r^a\varphi \circ t$ c'est la forme générale des solutions de (*) quand$a = b$

b) On suppose maintenant que : $a \neq b$. Soit $f_0 = \lambda h$ alors $Tf_0 = \lambda Th = \lambda bh$, $Tf_0 - af_0 = h$ donne $\lambda = \dfrac{1}{b-a}$. De façon pareille toute solution f de (*) s'écrit sous la forme $f = f_0 + r^a\varphi \circ t = \dfrac{1}{b-a}h + r^a\varphi \circ t$, c'est la forme générale des solutions de (*) quand $a \neq b$.

13) a) Pour cette équation $a = 1$, $h(x,y) = \dfrac{x^2+y^2-xy}{x^2+y^2-xy}$. Les calculs montrent que $Th = 0$, d'où $b = 0$, donc $a \neq b$, d'où $f(x,y) = -h(x,y) + \sqrt{x^2+y^2}\,\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$, où $\varphi : \mathbb{R}^{+*} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$.

b) Ici $a = 2, h(x,y) = \dfrac{(x^2+y^2)(x-y)}{x+y}$. Les calculs montrent que $Th = 2h$, d'où $a = b = 2$, donc $f(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2} + (x^2+y^2)\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$, où $\varphi : \mathbb{R}^{+*} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$.

Problème 2

La constante d'Euler, la transformée de Laplace et la fonction de Bessel

Partie I : La constante d'Euler.

1) $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{n+1} - \ln(1 + \frac{1}{n}) \leq 0$ et $v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{n+1} - \ln(1 + \frac{1}{n+1}) \geq 0$ (simple étude de fonctions) et $u_n - v_n = \ln(1\frac{1}{n}) \longrightarrow 0$, donc (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

2) Au voisinage de 0 : $f(x) = \dfrac{1-(1-x)^n}{x} = \dfrac{g(0)-g(x)}{x} \longrightarrow -g'(0) = n$ où $g(x) = (1-x)^n$ donc f est intégrable sur $]0,1]$ car prolongeable par continuité en 0.

3) $f(x) = \dfrac{1-\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\mathcal{C}_n^k x^k}{x} = \dfrac{-\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\mathcal{C}_n^k x^k}{x} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\mathcal{C}_n^k x^{k-1}$ est une fonction polynômiale, son degré est $n-1$, son coéfficient dominant est $(-1)^{n-1}$.

4) $f(x) = \dfrac{1-(1-x)^n}{x} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(1-x)^k$, somme d'une suite géométrique.

5) D'aprés ce qui précède on a : $f(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(1-t)^k = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\mathcal{C}_n^k t^{k-1}$, d'où aprés intégration on obtient : $\displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}\mathcal{C}_n^k}{k} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.

Partie II : La transformée de Laplace.

1) Montrer que l'application $\mathrm{e}^t f(t) = \mathrm{e}^{-t}t^n \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc est bornée sur $[0,+\infty[$, d'où $f(t)=t^n$ est d'ordre exponentiel, alors que $\forall\alpha>0,\ \mathrm{e}^{-\alpha t}g(t) = \mathrm{e}^{t^2-\alpha t} \underset{+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, donc n'est pas bornée sur $[0,+\infty[$, d'où $f(t)=\mathrm{e}^{t^2}$ est n'est pas d'ordre exponentiel.

2) $0\in\mathcal{E}$, évident. D'autre part soit $f,g\in\mathcal{E}$, donc $\exists\alpha>0,\beta>0$ tel que $\mathrm{e}^{-\alpha t}f(t),\mathrm{e}^{-\beta t}g(t)$ soit majorées, alors $\forall\lambda\in\mathbb{R}$, la faoction $\mathrm{e}^{-(\alpha+\beta)t}(f(t)+\lambda g(t) = \mathrm{e}^{-\beta t}\mathrm{e}^{-\alpha t}f(t) + \lambda\mathrm{e}^{-\alpha t}\mathrm{e}^{-\beta t}g(t)$ est bornée sur $[0,+\infty[$ en tant que somme et produit de fonctions bornées, d'où $f+\lambda g\in\mathcal{E}$, donc $\mathcal{E}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

3) Soit $f\in\mathcal{E}$, donc $\exists\alpha>0,M>0$ tel que $|\mathrm{e}^{-\alpha t}f(t)|\leq M$ sur $[0,+\infty[$, on peut toujours prendre $\alpha>x+1$, quitte à remplacer α par $\alpha+x+1$, donc $|\mathrm{e}^{-xt}f(t)|\leq|\mathrm{e}^{-\alpha-1t}f(t)|\leq M\mathrm{e}^{-t}$, qui est intégrable, donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xt}f(t)\mathrm{d}t$ est bien définie. La linéarité de l'application $f\mapsto L(f)$ découle de celle de l'intégrale.

4)
a) Si $f(t)=t^n,\ n\geq1$, à l'aide d'une intégration par paties, on trouve que $I_n = L(f)(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty}t^n\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = nI_{n-1}$, d'où $I_n=n!$, par récurrence.

b) Si $f(t)=\mathrm{e}^{-at},\ a>0$, alors $L(f)(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-(a+x)t}\mathrm{d}t = \frac{1}{a+x}$

c) Si $f(t)=t^n\mathrm{e}^{-at}$ $,a>0,n\geq1$, à l'aide d'une intégration par paties, on trouve que $I_n = L(f)(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty}t^n\mathrm{e}^{-(x+a)t}\mathrm{d}t = \frac{n}{x+a}I_{n-1}$, d'où $I_n = \dfrac{n!}{(x+a)^n}$.

d) Si $f(t)=\mathrm{e}^{-at}\sin(bt),\ a,b>0$, alors $L(f)(x) = \mathcal{R}e\left(\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{(-(x+a)+ib)t}\mathrm{d}t\right) = \left[\dfrac{\mathrm{e}^{(-(x+a)+ib)t}}{-(x+a)+ib}\right]_0^{+\infty} = \left[\mathrm{e}^{-(x+a)t}\dfrac{\mathrm{e}^{ibt}}{-(x+a)+ib}\right]_0^{+\infty} = \left[-\dfrac{\mathrm{e}^{-(x+a)t}}{(x+a)^2+b^2}((x+a)+ib)\mathrm{e}^{ibt}\right]_0^{+\infty}$.

e) $f(t)=\mathrm{e}^{-at}\cos(bt),\ a,b>0$.

5) Soit $f\in\mathcal{E}$ tel que $f'\in\mathcal{E}$, montrer que $L(f')(x) = xL(f)(x)-f(0),\ \forall x>0$.

6) Soit $f\in\mathcal{E}$ tel que $f',f``\in\mathcal{E}$, montrer que $L(f``)(x) = x^2L(f)(x)-xf'(0)-f''(0),\ \forall x>0$.

7) Retrouver la formule de $L(f)(x)$ quanf $f(t) = t^n,\ n \geq 1$.

8) **Application**. Dans la suite du problème, on admettra que l'application $f \longmapsto L(f)$ est injective sur $\mathcal{E}$, et on se propose de résoudre le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rl} X'(t) = & X(t) + 2Y(t) \\ Y'(t) = & Y(t) + \mathrm{e}^t \\ X(0) = & 0 \\ Y(0) = & 0 \end{array}\right.$$

Pour cela on pose $x(s) = L(X)(s)$ et $y(s) = L(Y)(s)$.

a) Écrire le système d'équations vérifiées par les fonctions x et y.

b) Résoudre ce système, puis en déduire $X(t)$ et $Y(t)$.

Partie III : La fonction de Bessel.

On admet dans cette partie qu'on peut dériver à l'intérieur d'une intégrale, et qu'on peut aussi permuter l'ordre d'intégration. Pour tout réel x, on pose

$$B(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(x\cos t)\mathrm{d}t$$

1) Exprimer J' et J“ à l'aide d'intégrales.

2) Monter que $J'(x) = -\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi^2} \sin^2 t \cos(x\cos t)\mathrm{d}t$, puis que J est solution de l'équation différentielle xy“$(x) + J'(x) + xJ(x) = 0$.

3) Pour tout réel $x > 0$, on pose $I(x) = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{1}{x^2 + \cos^2 t}\mathrm{d}t$.

a) Montrer que $I(x) = 2\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{x^2 + \cos^2 t}\mathrm{d}t$.

b) Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{x^2 + \cos^2 t}\mathrm{d}t$, à l'aide d'un changement de varaiable approprié, puis en déduire $I(x)$.

4) Calculer la transformée de Laplace de la fonction de Bessel J.

Partie IV : Transformée de Laplace de la fonction logarithmique.

Dans cette partie on admet qu'on peut permuter intégrales et limites.

1) Montrer que la fonction $g :\longmapsto \mathrm{e}^{-t}\ln t$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

2) Pour tout réel $x > 0$ et entier $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $\left\{\begin{array}{rll} U_n(x) = & (1 - \frac{x}{n})^n \ln x & \text{si } x \in]0, n] \\ = & 0 & \text{si } x \geq n \end{array}\right.$.

a) Pour $x > 0$ fixé, calculer $\lim_{n\longrightarrow+\infty} U_n(x)$.

b) Montrer que $\forall x > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leq |U_n(x)| \leq \mathrm{e}^{-x}|\ln x|$, puis en déduire que U_n est intégrable sur $]0, +\infty[$.

3) On pose $J_n = \displaystyle\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \ln t\mathrm{d}t$, justifier l'existence de J_n puis calculer sa limite.

4) Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$. Justifier l'intégrabilité de la fonction $t \longmapsto t^p \ln(nt)$ sur $]0, 1]$ puis calculer $\displaystyle\int_0^1 t^p \ln(nt)\mathrm{d}t$.

5) Exprimer J_n en fonction de u_n.
Indication : On pourra utiliser la question $(k+1)\mathcal{C}_{n+1}^{k+1} = (n+1)\mathcal{C}_n^k$ et la question 5 de la partie I.

6) En déduire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} \ln t\mathrm{d}t$ en fonction de la constante d'Euler, γ.

7) Montrer que la transformée de Laplace est bien définie pour tout $x > 0$, puis la calculer.

Fin.