

# DS 9 (COMMUN) : *Algèbre linéaire et euclidienne* *Fonctions à deux variables*

MPSI-Maths.  
CPGE Med V- Prépas La Résidence

Casablanca  
2006-2007

Mercredi 13 Juin 2007.

Durée 4 heures.

### Conseils pour la rédaction et la présentation des copies.

- Chaque variable utilisée dans une démonstration doit être définie.
- L'énoncé ne doit pas être recopié sur les copies.
- Chaque résultat annoncé doit être justifié en citant précisément le théorème du cours avec ses hypothèses exactes utilisé ou en citant le numéro de la question précédente utilisée.
- Les résultats importants doivent être simplifiés et encadrés.
- Les calculs doivent être détaillés et expliqués à l'aide de phrases simples.
- Laisser une marge à gauche de chaque feuille, en tirant un trait vertical, et un horizontal de la 1ère double feuille pour la note et les remarques du correcteur.
- Numéroté les double feuille de la façon suivante :  $1/n, 2/n, \dots, n/n$  où  $n$  est le nombre total de doubles feuilles.
- Les questions doivent être traités dans l'ordre de l'énoncé.
- Tirer deux traits diagonaux pour rayer une partie du raisonnement que vous considérez fausse.

### Barème.

**Présentation** 3 points, **Rédaction** 3 points.

Exercice (13 points)			
1) 1 point	2.a) 3 points	3.a) 3 points	4.a) 1 point
	2.b) 2 points	3.b) 2 points	4.b) 1 point

Problème (51 points)				
Partie I		Partie II		
		Partie A		
1.1) 2 points	2.1) 2 points			
1.2) 2 points	2.2) 3 points	1.1) 1 point	1.2) 1 point	2) 1 point
1.3.1) 1 point	2.3) 2 points	3.1) 1 point	3.2) 1 point	3.3) 1 point
1.3.2) 2 points		3.4) 2 points	3.5) 1 point	
Partie III		Partie B		
1) 1 point	2) 1 point	1.1) 1 point	1.2) 1 point	2) 1 point
3) 1 point	4) 1 point	3) 1 point	4) 2 points	5) 1 point
5.1) 2 points	5.2) 1 point	6) 1 point		
5.3.1) 1 point	5.3.2) 2 points			
Partie IV				
1.1) 1 point	1.2) 1 point	2.1) 2 points	2.2) 1 point	3.1) 2 points
3.2) 1 point	3.3) 2 points			

# Problème.

CCP(ENSI) Maths II, PSI, 2007.

## Notations.

On désigne par  $\mathbb{R}$  l'ensemble des nombres réels, par  $\mathbb{N}$  l'ensemble des nombres entiers naturels et par  $\mathbb{N}^*$  l'ensemble  $\mathbb{N}$  privé de 0.

Pour  $n$  entier naturel non nul, on note  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  (respectivement  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ) l'espace vectoriel réel des matrices carrées à  $n$  lignes (respectivement l'espace vectoriel des matrices colonnes à  $n$  lignes) à coefficients réels.

On note  $\det(A)$  le déterminant d'une matrice carrée  $A$  et  ${}^tB$  la transposée d'une matrice  $B$  quelconque.

Etant donnée une matrice  $A$ , la notation  $A = (a_{i,j})$  signifie que  $a_{i,j}$  est le coefficient de la ligne  $i$  et de la colonne  $j$  de la matrice  $A$ .

Un réel  $\lambda$  est dit appelé valeur propre de  $A$  si et seulement si

$\exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  tel que  $X \neq 0$  et  $AX = \lambda X$ .

Le polynôme caractéristique de  $A$  est défini par la relation  $P_A(t) = \det(A - tI_n)$ .

Lorsque  $A = (a)$  est une matrice de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ , on identifie  $A$  avec le réel  $a$ .

Pour tout entier naturel, on note  $n!$  la factorielle de  $n$ , avec la convention  $0! = 1$ .

Soient  $p$  et  $n$  deux entiers naturels tels que  $p \leq k \leq n$  :

– on note  $[[p, n]]$  l'ensemble des entiers  $k$  tels que  $p \leq k \leq n$ .

– on rappelle la notation  $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ .

Un  $\mathbb{R}$ -ev muni d'un produit scalaire est appelé préhilbertien Le produit scalaire de deux vecteurs  $u$  et  $v$  d'un espace préhilbertien sera noté  $(u|v)$ .

## Objectifs.

Dans ce problème, on définit la matrice de Gram d'une famille finie de vecteurs d'un espace préhilbertien réel.

La première partie porte sur des calculs de déterminants, la valeur d'un des déterminants calculés servant à illustrer la quatrième partie.

Dans la deuxième partie, on définit les matrices de Gram et on en étudie quelques propriétés.

Les troisième et quatrième parties sont des applications de la deuxième partie.

## PARTIE I.

Les résultats de cette partie ne serviront que dans la partie IV.

### I.1. Déterminant $d_p$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Pour  $p \in [[0, n]]$ , on note  $A_p = (a_{i,j})$  la matrice carrée de  $\mathcal{M}_{n-p+1}(\mathbb{R})$  dont le coefficient de la ligne  $i$  et de la colonne  $j$  est égal à  $a_{i,j} = \binom{p+i+j-2}{p+i-1}$  avec  $(i, j) \in [[1, n-p+1]] \times [[1, n-p+1]]$ .

On note  $d_p = \det(A_p)$ .

**I.1.1.** Expliciter les entiers  $r$  et  $s$  tels que  $a_{i,j} = \binom{r}{s}$  pour les quatre coefficients  $a_{1,1}, a_{1,n-p+1}, a_{n-p+1,1}$  et  $a_{n-p+1,n-p+1}$ .

**I.1.2.** Pour tout entier naturel  $n \geq 2$  calculer les déterminants  $d_n, d_{n-1}$  et  $d_{n-2}$ .

**I.1.3.** On suppose que la matrice  $A_p$  possède au moins deux lignes.

On note  $L_i$  la ligne d'indice  $i$ .

**I.1.3.1** Dans le calcul de  $d_p$  on effectue les opérations suivantes : pour  $i$  variant de  $n-p+1$  à 2, on retranche la ligne  $L_{i-1}$  à la ligne  $L_i$  (opération codée  $L_i \leftarrow L_i - L_{i-1}$ ).

Déterminer le coefficient d'indice  $(i, j)$  de la nouvelle ligne  $L_i$ .

**I.1.3.2** En déduire une relation entre  $d_p$  et  $d_{p+1}$ , puis en déduire  $d_p$ .

### I.2. Déterminants $D_n$ et $\Delta_n$ .

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $D_n$  le déterminant de la matrice carrée de  $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$  dont le coefficient de la ligne  $i$  et de la colonne  $j$  est  $(i+j)!$ , **les lignes et les colonnes étant indexées de 0 à  $n$ .**

On note  $D_n = \det((i+j)!)$ . Avec les mêmes notations, on note  $\Delta_n = \det\left(\binom{i+j}{i}\right)$  pour  $(i, j) \in [[0, n]] \times [[0, n]]$ .

**I.2.1.** Calculer les déterminants  $D_0, D_1, D_2, \Delta_0, \Delta_1$  et  $\Delta_2$ .

**I.2.2.** Donner une relation entre  $D_n$  et  $\Delta_n$ .

**I.2.3.** En déduire  $\Delta_n$  puis  $D_n$ .

## PARTIE II.

**A.** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

**II.A.1.** Soit  $C = (c_{i,j})$  une matrice carrée de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Pour tout entier  $i \in [[1, n]]$ , on note  $X_i$  la matrice colonne de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  dont tous les coefficients sont nuls, sauf le coefficient de la ligne  $i$  qui vaut 1.

**II.A.1.1** Pour  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, n \rrbracket$ , déterminer le produit  ${}^t X_i C X_j$ .

**II.A.1.2** En déduire que  $C = 0$  si et seulement si pour tout couple  $(X, Y)$  de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  on a  ${}^t X C Y = 0$ .

Soit  $E$  un espace euclidien de dimension  $n$  et soit  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ . Soit  $A = (a_{i,j})$  la matrice carrée de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que  $a_{i,j} = (e_i | e_j)$  le produit scalaire de  $e_i$  et  $e_j$ .

Pour tout vecteur  $u$  de  $E$ , on note avec la même lettre majuscule  $U$  la matrice colonne des composantes du vecteur  $u$  relativement à la base  $\mathcal{B}$ .

**II.A.2.** Pour tout couple  $(x, y)$  de vecteurs de  $E$ , justifier l'égalité  $(x|y) = {}^t X A Y$ .

Soit  $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$  une autre base de  $E$  et soit  $A' = (a'_{i,j})$  la matrice carrée de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  avec  $a'_{i,j} = (e'_i | e'_j)$ . On note  $P$  la matrice de passage de la base  $\mathcal{B}$  à la base  $\mathcal{B}'$ .

**II.A.3.** Pour tout vecteur  $u$  de  $E$ , on note  $U'$  la matrice colonne des composantes du vecteur  $u$  relativement à la base  $\mathcal{B}'$ .

**II.A.3.1** Soit  $x$  un vecteur de  $E$ . Donner une relation entre les matrices  $X, X'$  et  $P$ .

**II.A.3.2** Justifier l'égalité  $A' = {}^t P A P$ .

**II.A.3.3** Que devient l'égalité précédente lorsque  $\mathcal{B}'$  est une base orthonormale ?

**II.A.3.4** Montrer que la matrice  $A$  est inversible et que  $\det(A) > 0$ .

**II.A.3.5** Déduire des résultats précédents que si  $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$  est une famille libre de vecteurs d'un espace préhilbertien réel, la matrice  $B = ((\varepsilon_i | \varepsilon_j))$  de  $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$  de coefficients les produits scalaires  $(\varepsilon_i | \varepsilon_j)$ , vérifie  $\det(B) > 0$ .

**B.** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Dans un espace préhilbertien réel  $\mathcal{H}$ , on considère  $n$  vecteurs

**quelconques**  $u_1, \dots, u_n$ . Soit  $M = ((u_i | u_j))$  la matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  de coefficients les produits scalaires  $(u_i | u_j)$ . A toute matrice colonne

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ de } \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \text{ on associe le vecteur } v = \sum_{i=1}^n x_i u_i.$$

**II.B.1.** Dans cette question on suppose  $n = 2$ .

**II.B.1.1** Montrer que  $\det(M) \geq 0$ .

**II.B.1.2** A quelle condition sur  $\det(M)$  la famille  $(u_1, u_2)$  est-elle libre ?

On revient au cas général où  $n$  est quelconque dans  $\mathbb{N}^*$ .

**II.B.2.** Exprimer les coefficients de la matrice  $MX$  en fonction des produits scalaires  $(u_i | v)$ .

**II.B.3.** En déduire l'égalité  ${}^t X M X = \|v\|^2$  où  $\|v\|$  est la norme du vecteur  $v$ .

**II.B.4.** Soit  $\lambda$  une valeur propre (complexe) de la matrice  $M$ . Justifier que  $\lambda$  appartient à  $\mathbb{R}$ . Montrer que  $\lambda \geq 0$ .

**II.B.5.** Montrer que  $MX = 0$  si et seulement si  $v$  est le vecteur nul.

**II.B.6.** On suppose que la matrice  $M$  est inversible, déduire de la question précédente que la famille  $(u_1, \dots, u_n)$  est libre.

Définition : étant donné  $n$  vecteurs  $v_1, \dots, v_n$  d'un espace préhilbertien réel  $\mathcal{H}$ , on appelle matrice de Gram des vecteurs  $v_1, \dots, v_n$ , la matrice  $G(v_1, \dots, v_n) = ((v_i | v_j))$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  de coefficients les produits scalaires  $(v_i | v_j)$ . Il résulte de la partie II que la famille  $(v_1, \dots, v_n)$  est libre si et seulement si  $\det(G(v_1, \dots, v_n)) \neq 0$ ; dans ce cas, on a  $\det(G(v_1, \dots, v_n)) > 0$ .

## PARTIE III.

Dans cette partie,  $E$  est l'espace euclidien  $\mathbb{R}^3$  supposé orienté,  $u_1, u_2, u_3$  sont trois vecteurs unitaires de  $E$ . On note  $\alpha, \beta, \gamma$  les réels de  $[0, \pi]$  tels que  $(u_1 | u_2) = \cos(\alpha)$ ,  $(u_2 | u_3) = \cos(\beta)$ ,  $(u_3 | u_1) = \cos(\gamma)$  et on suppose que  $0 \leq \gamma \leq \beta \leq \alpha \leq \pi$ .

**III.1.** déterminer les racines du polynôme

$$P(X) = X^2 - 2X \cos(\beta) \cos(\gamma) + \cos^2(\beta) + \cos^2(\gamma) - 1.$$

**III.2.** En déduire une factorisation de  $\det(G(u_1, u_2, u_3))$  en produit de deux facteurs.

**III.3.** Montrer que  $\cos(\alpha)$  est compris entre  $\cos(\beta - \gamma)$  et  $\cos(\beta + \gamma)$ .

**III.4.** Montrer que  $\det(G(u_1, u_2, u_3)) = 0$  si et seulement si  $\alpha + \beta + \gamma = 2\pi$  ou  $\alpha = \beta + \gamma$ .

**III.5.** On suppose que  $\alpha = \beta = \gamma$  et on note  $c = \cos(\alpha)$ .

**III.5.1** Déterminer le polynôme caractéristique de la matrice  $G(u_1, u_2, u_3)$ . En déduire ses valeurs propres.

**III.5.2** Déterminer la plus petite valeur possible de  $c$ .

**III.5.3** On prend  $c = -\frac{1}{2}$ .

**III.5.3.1** Quelle est la valeur de  $u_1 + u_2 + u_3$  ?

**III.5.3.2** Déterminer le noyau de l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice  $G(u_1, u_2, u_3)$ .

En utilisant **II.B.5**, retrouver la valeur de  $u_1 + u_2 + u_3$ .

## PARTIE IV.

Soit  $n$  un entier naturel avec  $n \geq 2$ .

On considère  $n$  vecteurs  $v_1, \dots, v_n$  d'un espace préhilbertien réel  $\mathcal{H}$ .

**IV.1.** Opérations sur les vecteurs d'une matrice de Gram. Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

**IV.1.1.** Exprimer  $\det(G(v_1, \dots, v_{n-1}, \lambda v_n))$  en fonction de  $\lambda$  et de  $\det(G(v_1, \dots, v_{n-1}, v_n))$ .

**IV.1.2.** Exprimer  $\det(G(v_1, \dots, v_{n-1}, v_n + \lambda v_1))$  en fonction de  $\det(G(v_1, \dots, v_n))$ .

**IV.2.** Soit  $F = \text{Vect}(v_1, \dots, v_n)$  le sous-espace vectoriel de  $\mathcal{H}$  engendré par les vecteurs  $v_1, \dots, v_n$ .

**IV.2.1.** Soit  $w$  un vecteur de  $\mathcal{H}$  orthogonal à  $F$ .

Exprimer  $\det(G(v_1, \dots, v_n, w))$  en fonction de  $w$  et de  $\det(G(v_1, \dots, v_n))$ .

**IV.2.2.** Soit  $v \in \mathcal{H}$ , on note  $d(v, F)$  la distance du vecteur  $v$  au sous-espace vectoriel  $F$ .

Montrer l'égalité  $\det(G(v_1, \dots, v_{n-1}, v)) = (d(v, F))^2 \det(G(v_1, \dots, v_n))$ .

**IV.3.** Calcul de la distance d'un vecteur à un sous-espace vectoriel.

**IV.3.1.** Pour  $k \in \mathbb{N}$ , justifier l'existence des intégrales

$$J_k = \int_0^{+\infty} t^k e^{-t} dt \text{ et calculer leur valeur.}$$

On rappelle (et on admettra) que  $\mathbb{R}[X]$ , l'espace vectoriel réel des polynômes à coefficients dans  $\mathbb{R}$ , est un espace préhilbertien réel pour

$$\text{le produit scalaire } (P|Q) = \int_0^{+\infty} e^{-t} P(t)Q(t) dt.$$

On considère la base de  $\mathbb{R}[X]$  formée des vecteurs  $e_k$  où  $e_k = X^k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ .

**IV.3.2.** Calculer les produits scalaires  $(e_i|e_j)$ .

**IV.3.3.** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Dédurre des questions précédentes et de la partie **I**, la distance du vecteur  $e_n$  au sous-espace vectoriel  $\mathbb{R}_{n-1}[X]$  des polynômes de degré  $\leq n-1$  de l'espace  $\mathbb{R}[X]$ .

## Exercice.

Concours marocain Maths I, PSI, 2006.

1) Soit  $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$ , montrer que :

$$\frac{\partial h}{\partial v} = 0 \iff \exists h_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ tel que } h(u, v) = h_1(u), \forall (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

2) Soit  $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$   
 $(u, v) \mapsto (ue^v, e-v)$

a) Montrer que  $\Phi$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ , et réalise une bijection de  $\mathbb{R}^2$  vers  $\Omega = \mathbb{R} \times ]0, +\infty[$ .

b) Pour tout  $(x, y) \in \Omega$ , exprimer  $\Phi^{-1}(x, y)$ , puis justifier que  $\Phi^{-1}$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\Omega$ .

3) Soit  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$ , vérifiant  $x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$ . On pose  $f^* = f \circ \Phi$

a) Justifier que  $f^*$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^2$ , puis calculer les dérivés partiels  $\frac{\partial f^*}{\partial u}$  et  $\frac{\partial f^*}{\partial v}$ .

b) En déduire la forme de  $f^*$  puis celle de  $f$ .

4) Soit  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  fixe, on se propose de trouver les fonctions  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$ , vérifiant  $x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = ax + by$ .

a) Trouver une solution particulière  $g$  de l'équation ci-dessus.

b) En déduire la forme générale des solutions

**Fin.**