DS 9 : *Algébre linéaire*
Algébre euclidienne.
Fonctions à deux variables.

Prépas PCSI.
Mr Mamouni : *myismail@altern.org*

CORRIGÉ

PREMIER PROBLÉME

PARTIE I : Étude de la suite de polynômes de $(T_n)_{in\mathbb{N}^*}$

1) $T_2(X) = 4X^2 - 1, T_3(X) = 2X(4X^2 - 1) - 2X = 8X^3 - 4X$.

2) a) Il suffit de raisonner par récurrence forte, d'abord le résultat est bien vérifié pour $n = 0$ et $n = 1$, ensuite on suppose qu'il est vrai pour n et $n - 1$ et d'aprés la relation $T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x)$, on peut affirmer que T_n est un polynôme de degré n, dont le coéfficient dominant vérifie la relation : $co(T_n) = 2co(T_{n-1})$, il s'agit donc d'une suite géométrique de raison 2, d'où $co(T_n) = 2^n co(T_0) = 2^n$.

b) Il s'agit encore d'une récurrence forte, vu que T_n dépond de $n - 1$ et $n - 2$.
Pour $n = 0, 1, 2, 3$ le résultat est vrai.
Supposons maintenant le résultat vrai pour $n - 1$ et $n - 2$.
Si n est pair, alors $n - 1$ impair et $n - 2$ pair, donc T_{n-1} impair et T_{n-2} pair, d'où XT_{n-1} et T_{n-2} sont pair et par suite $T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x)$ est aussi pair.
Même raisonnement pour le cas n impair.

3) On montre par récurrence forte, toujours, que $T_n(1) = n + 1$.

4) a) On raisonne encore par récurrence forte, d'abord le résultat est bien vérifié pour $n = 0$ et $n = 1$, ensuite on suppose qu'il est vrai pour n et $n - 1$ et d'aprés la relation $T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x)$, on a :

$$\begin{aligned}T_n(\cos\theta) &= 2\cos\theta T_{n-1}(\cos\theta) - T_{n-2}(\cos\theta)\\ &= 2\cos\theta\frac{\cos n\theta}{\sin\theta} - \frac{\cos(n-1)\theta}{\sin\theta}\\ &= \frac{2\cos\theta\cos n\theta - \cos\theta\cos n\theta - \sin\theta\sin n\theta}{\sin\theta}\\ &= \frac{\cos\theta\cos n\theta - \sin\theta\sin n\theta}{\sin\theta}\\ &= \frac{\cos(n+1)\theta}{\sin\theta}\end{aligned}$$

b) D'aprés la question précédente :

$$\begin{aligned}T_n(\cos\theta) = 0 &\iff \sin(n+1)\theta = 0\\ &\iff (n+1)\theta = k\pi\\ &\iff \theta = \frac{k\pi}{n+1}\end{aligned}$$

En prenant $x_k = \cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)$ avec $1 \leq k \leq n$, on obtient n racines de T_n deux à deux distinctes toutes dans $]-1, 1[$, or $\deg(T_n) = n$, donc ce sont exactement les racines de T_n.

c) On rappelle que la décomposition d'un polynôme de degré n, de coéfficient dominant, λ et dont les racines sont x_k tel que $1 \leq k \leq n$ s'écrit $P(X) = \lambda\prod_{k=1}^{n}(X - x_k)$, or T_n est un polynôme de degré n, de coéfficient dominant, 2^n et dont les racines sont $x_k = \cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)$ tel que $1 \leq k \leq n$, donc sa décomposition s'écrit $T_n(X) = 2^n\prod_{k=1}^{n}\left(X - \cos\frac{k\pi}{n+1}\right)$

d) En remplaçant X par 1, dans la formule : $T_n(X) = 2^n\prod_{k=1}^{n}\left(X - \cos\frac{k\pi}{n+1}\right)$, on obtient $n+1 = 2^n\prod_{k=1}^{n}2\sin^2\left(\frac{k\pi}{2(n+1)}\right)$ car $1 - \cos(a) = 2\sin^2\left(\frac{a}{2}\right)$, d'où $n+1 = 2^{2n}\prod_{k=1}^{n}\sin^2\left(\frac{k\pi}{2(n+1)}\right)$ et par suite $\prod_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{k\pi}{2(n+1)}\right) = \frac{\sqrt{n+1}}{2^n}$.

5) a) Simple calcul de dérivation, en utilisant la relation : $(P(cos\theta))' = -\sin\theta P'(\cos\theta)$.

b) En prenant $X = \cos\theta$ dans la question précédente, on obtient : $(X^2-1)T_n``(X) + 3XT_n'(X) - (n^2+n)T_n(X) = 0$ pour $X \in [-1, 1]$, donc pour tout X, car un polynôme qui admet une infinité de racines est partout nul.

PARTIE II : Étude de l'endomorphisme L.

1) Il est clair que $L(P + \lambda Q) = L(P) + \lambda L(Q)$, d'autre part si P est un polynôme de degré inférieur à n, c'est aussi vrai pour $L(P)$, donc L est un endomorphisme de E.

2) a) D'aprés la question 5.b de la partie I, on a : $L(T_k) = (k^2 + 2k)T_k$

b) Ainsi $\lambda_k = k^2 + 2k$ tel que $0 \leq k \leq n$ sont les valeurs propres de L, dont le sous-espace propre associé est engendré par T_k et donc de dimension 1.

PARTIE III : Étude d'un produit scalaire.

1) Symétrie : $\varphi(P, Q) = \int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}P(x)Q(x)dx = \varphi(Q, P)$

Bilinéarité :

$$\begin{aligned}\varphi(P_1 + \lambda P_2, Q) &= \int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}(P_1(x) + \lambda P_2)Q(x)dx\\ &= \int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}P_1(x)Q(x)dx + \lambda\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}P_2Q(x)dx\\ &= \varphi(P_1, Q) + \lambda\varphi(P_1, Q)\end{aligned}$$

D'où φ est linéaire à gauche, comme elle est symétrique, alors elle est aussi biléaire à droite.

Positive : $\varphi(P, P) = \int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}P(x)^2dx \geq 0$

Définie :

$$\begin{aligned}\varphi(P,P)=0 &\Longrightarrow \int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}P(x)^2dx=0\\ &\Longrightarrow P^2=0 \text{ sur } [-1,1] \text{ car } P^2 \text{ continue, positive}\\ &\Longrightarrow P=0 \text{ sur } [-1,1]\\ &\Longrightarrow P=0 \text{ car c'est un polynôme}\end{aligned}$$

2) On a :

$$\begin{aligned}\varphi(L(P),Q) &= \int_{-1}^{1}\left(3x\sqrt{1-x^2}P'(x)-(1-x^2)^{\frac{3}{2}}P``(x)\right)Q(x)dx\\ &= \int_{-1}^{1}\left(-(1-x^2)^{\frac{3}{2}}P'(x)\right)'Q(x)dx\\ &= \left[\left(-(1-x^2)^{\frac{3}{2}}P'(x)\right)Q(x)\right]_{-1}^{1}+\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}P'(x)Q'(x)dx\\ &= \int_{-1}^{1}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}P'(x)Q'(x)dx\end{aligned}$$

De la même façon, on montre que : $\varphi(P,L(Q)) = \int_{-1}^{1}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}P'(x)Q'(x)dx$, d'où l'égalité.

3) Soit $k\neq p$, on a :

$$\begin{aligned}\varphi(L(T_k),T_p)=\varphi(L(T_k),T_p) &\Longrightarrow (k^2+2k)\varphi(T_k,T_p)=(p^2+2p)\varphi(T_k,T_p)\\ &\Longrightarrow (k^2+2k-p^2-2p)\varphi(T_k,T_p)=0\\ &\Longrightarrow (k-p)(k+p+2)\varphi(T_k,T_p)=0\\ &\Longrightarrow \varphi(T_k,T_p)=0\end{aligned}$$

Et donc la famille $(T_k)_{0\leq k\leq n}$ est orthogonale.

EXERCICE I

1) $\dfrac{\partial h}{\partial v}=0 \Longleftrightarrow h=Cte$ qui ne dépond pas de v mais seulement de u, donc $h(u,v)=h_1(u)$, comme h est de classe $\mathcal{C}^1$, alors h_1 l'est aussi.

2) a) Φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, car ses fonctions coordonnées associées $\Phi_1:(u,v)\mapsto ue^v$ et $\Phi_2:(u,v)\mapsto e^{-v}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, en tant que produit et composé de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

D'autre part, $\forall(x,y)\in\Omega, \exists! v=-\ln y\in\mathbb{R}$ tel que $y=e^{-v}$ et $\exists! u=xy\in\mathbb{R}$ tel que $x=ue^v$, donc $\exists!(u,v)\in\mathbb{R}^2$ tel que $(x,y)=\Phi(u,v)$, et donc Φ est bijective.

b) D'aprés ce qui précède, on a : $\Phi^{-1}(x,y)=(xy,-\ln y)$ qui est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω, car ses fonctions coordonnées associées Φ_1^{-1} : $(x,y)\mapsto xy$ et $\Phi_2:(x,y)\mapsto -\ln y$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω, en tant que produit et composé de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω.

3) a) $f^*=f\circ\Phi$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ car Φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\Phi(\mathbb{R}^2)=\Omega$, avec les relations suivantes :

$$\frac{\partial f^*}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u}.\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial u}.\frac{\partial f}{\partial y} = e^v\frac{\partial f}{\partial x}$$

$$\frac{\partial f^*}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial v}.\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial v}.\frac{\partial f}{\partial y} = ue^v\frac{\partial f}{\partial x}-e^{-v}\frac{\partial f}{\partial y}$$

b) D'aprés la question précèdente, on a :
$\dfrac{\partial f^*}{\partial v}=ue^v\dfrac{\partial f}{\partial x}-e^{-v}\dfrac{\partial f}{\partial y}=x\dfrac{\partial f}{\partial x}-y\dfrac{\partial f}{\partial y}=0$, donc $f^*(u,v)=F(u)$ et par suite $f(x,y)=f\circ\Phi(u,v)=f^*(u,v)=F(u)=F(xy)$, avec F de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$

4) a) Les application linéaires de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$ s'écrivent sous la forme $g(x,y)=\alpha x+\beta y$, donc $x\dfrac{\partial g}{\partial x}-y\dfrac{\partial g}{\partial y}=ax+by \Longleftrightarrow \alpha x-\beta y=ax+by$, prendre donc $g(x,y)=ax-by$.

b) La solution générale, f de l'équation $x\dfrac{\partial f}{\partial x}-y\dfrac{\partial f}{\partial y}=ax+by$, s'écrit sous la forme $f=f_H+g$, où $f_H(x,y)=F(xy)$ est la solution générale de l'équation homegène sans second membre, et $g(x,y)=ax-by$ une solution particulière de l'équation avec second membre.

EXERCICE II

1) On a : $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u^3+u) = A^3 + A = 0$, donc $u^3+u=0$ et $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u) = A \neq 0$, donc $u \neq 0$.

2) a) Si u était injectif, alors A inversible, donc $A^3 + A = 0$ devient en multipliant par A^{-1}, $A^2 + I_3 = 0$, d'où $u^2 + id_E = 0$. Ainsi $A^2 = -I_3$, donc $\det(A^2) = \det(-I_3)$, d'où $\det(A)^2 = -1$ ce qui est impossible, donc u injective.

b) $u : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, donc $\dim(\mathrm{Ker}(u)) \leq 3$. D'aprés la question précèdente u est injective, donc $\dim(\mathrm{Ker}(u)) \neq 0$ et aussi $u \neq 0$, donc $\mathrm{Ker}(u) \neq \mathbb{R}^3$ et donc $\dim(\mathrm{Ker}(u)) \neq 3$, d'où $\dim(\mathrm{Ker}(u)) \in \{1, 2\}$.

3) $x \in \mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Ker}(u^2 + id_E) \Longrightarrow u(x) = 0_E, x = -u^2(x) = -u(0_E) = 0_E$, donc $\mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Ker} = \{0_E\}$
D'autre part : $\forall x \in E$ on a : $x = x + u^2(x) - u^2(x)$ avec $u(x + u^2(x)) = u(x) + u^3(x) = 0_E$ et $(u^2 + id_E)(-u^2(x)) = -(u^4(x) + u^2(x)) = -u(u^3(x) + u(x)) = -u(0_E) = 0_E$, donc $E = \mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Ker}(u^2 + id_E)$, et donc $\dim(\mathrm{Ker}(u^2 + id_E)) = \dim(E) - \dim(\mathrm{Ker}(u)) = 3 - \dim(\mathrm{Ker}(u)) \in \{1, 2\}$, car $\dim(\mathrm{Ker}(u)) \in \{1, 2\}$

4) a) Soit $x \in F = \mathrm{Ker}(u^2 + id_E)$, donc $u^2(x) + x = 0_E$, d'où $u^3(x) + u(x) = u(0_E) = 0_E$, donc $(u^2 + id_E)(u(x)) = 0_E$, d'où $u(x) \in \mathrm{Ker}(u^2 + id_E) = F$, donc F est stable par F.

b) $x \in F \Longrightarrow u^2(x)x = -x \Longrightarrow v^2(x) = -x \Longrightarrow v^2 = -id_F$.

c) $\det(v^2) = \det(-id_F) = (-1)^{\dim(F)}$, or $\det(v^2) = \det(v)^2 \geq 0$, et $\dim(F) \in \{2, 3\}$, d'où $\dim(F) = 2$.

d) Soit λ une valeur réelle de v, et x un vecteur propre associé, alors $v(x) = \lambda x$ et donc $-x = v^2(x) = v(\lambda x) = \lambda v(x) = \lambda^2 x$, d'où $\lambda^2 = -1$, impossible.

5) a) Soit λ, μ réels tel que $\lambda e'_2 + \mu e'_3 = 0_E$, on compose par u, d'où $\lambda e'_3 - \mu e'_2 = 0_E$, car $u(e'_2) = e'_3$ et $u(e'_3) = u^2(e'_2) = v^2(e'_2) = -e'_2$, puisque $e'_2 \in F$, F stable par u, $u = v$ sur F et $v^2 = -id_F$.

On obtient alors le système suivant : $\begin{cases} \lambda e'_2 + \mu e'_3 = 0_E & (1) \\ -\mu e'_2 + \lambda e'_3 = 0_E & (2) \end{cases}$,

$\lambda \times (1) - \mu \times (2) \Longrightarrow (\lambda^2 + \mu^2) e'_2 = 0_E \Longrightarrow \lambda^2 + \mu^2 = 0 \Longrightarrow \lambda = \mu = 0$, donc la famille (e'_2, e'_3) est libre.

b) Comme $\mathrm{Card}(\mathcal{B}') = \dim(E) = 3$, pour montrer que c'est une base, il suffit de montrer qu'elle est libre.
En effet, soit a, b, c des réels tel que $ae'_1 + be'_2 + ce'_3 = 0_E$, on compose par u, on obtient alors : $be'_3 - ce'_2 = 0$ car $u(e'_1) = 0_E, u(e'_2) = e'_3, u(e'_3) = -e'_2$, or la famille (e'_2, e'_3) est libre, donc $b = c = 0$ et par suite $ae'_1 = 0_E$, d'où $a = 0$, donc la famille (e'_1, e'_2, e'_3) est libre.

$\boxed{\text{Fin.}}$