

DS 9 : *Algèbre linéaire*
Algèbre euclidienne.
Fonctions à deux variables.

Prépas PCSI.

Mr Mamouni : myismail@altern.org

Source disponible sur:

©<http://www.chez.com/myismail>

CORRIGÉ

PREMIER PROBLÈME

PARTIE I : Étude de la suite de polynômes de $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$

1) $T_2(X) = 4X^2 - 1, T_3(X) = 2X(4X^2 - 1) - 2X = 8X^3 - 4X.$

2) a) Il suffit de raisonner par récurrence forte, d'abord le résultat est bien vérifié pour $n = 0$ et $n = 1$, ensuite on suppose qu'il est vrai pour n et $n - 1$ et d'après la relation $T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x)$, on peut affirmer que T_n est un polynôme de degré n , dont le coefficient dominant vérifie la relation : $co(T_n) = 2co(T_{n-1})$, il s'agit donc d'une suite géométrique de raison 2, d'où $co(T_n) = 2^n co(T_0) = 2^n$.

b) Il s'agit encore d'une récurrence forte, vu que T_n dépend de $n - 1$ et $n - 2$.

Pour $n = 0, 1, 2, 3$ le résultat est vrai.

Supposons maintenant le résultat vrai pour $n - 1$ et $n - 2$.

Si n est pair, alors $n - 1$ impair et $n - 2$ pair, donc T_{n-1} impair et T_{n-2} pair, d'où XT_{n-1} et T_{n-2} sont pair et par suite $T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x)$ est aussi pair.

Même raisonnement pour le cas n impair.

3) On montre par récurrence forte, toujours, que $T_n(1) = n + 1$.

4) a) On raisonne encore par récurrence forte, d'abord le résultat est bien vérifié pour $n = 0$ et $n = 1$, ensuite on suppose qu'il est vrai pour n et $n - 1$ et d'après la relation $T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x)$, on a :

$$\begin{aligned}
T_n(\cos \theta) &= 2 \cos \theta T_{n-1}(\cos \theta) - T_{n-2}(\cos \theta) \\
&= 2 \cos \theta \frac{\cos n\theta}{\sin \theta} - \frac{\cos(n-1)\theta}{\sin \theta} \\
&= \frac{2 \cos \theta \cos n\theta - \cos \theta \cos n\theta - \sin \theta \sin n\theta}{\sin \theta} \\
&= \frac{\cos \theta \cos n\theta - \sin \theta \sin n\theta}{\sin \theta} \\
&= \frac{\cos(n+1)\theta}{\sin \theta}
\end{aligned}$$

b) D'après la question précédente :

$$\begin{aligned}
T_n(\cos \theta) = 0 &\iff \sin(n+1)\theta = 0 \\
&\iff (n+1)\theta = k\pi \\
&\iff \theta = \frac{k\pi}{n+1}
\end{aligned}$$

En prenant $x_k = \cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)$ avec $1 \leq k \leq n$, on obtient n racines de T_n deux à deux distinctes toutes dans $] -1, 1[$, or $\deg(T_n) = n$, donc ce sont exactement les racines de T_n .

c) On rappelle que la décomposition d'un polynôme de degré n , de

coefficient dominant, λ et dont les racines sont x_k tel que $1 \leq k \leq n$ s'écrit $P(X) = \lambda \prod_{k=1}^n (X - x_k)$, or T_n est un polynôme de degré n , de coefficient dominant, 2^n et dont les racines sont $x_k = \cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)$ tel que $1 \leq k \leq n$, donc sa décomposition s'écrit

$$T_n(X) = 2^n \prod_{k=1}^n \left(X - \cos \frac{k\pi}{n+1}\right)$$

d) En remplaçant X par 1, dans la formule : $T_n(X) =$

$$2^n \prod_{k=1}^n \left(X - \cos \frac{k\pi}{n+1}\right), \text{ on obtient } n+1 = 2^n \prod_{k=1}^n 2 \sin^2 \left(\frac{k\pi}{2(n+1)}\right)$$

car $1 - \cos(a) = 2 \sin^2\left(\frac{a}{2}\right)$, d'où $n+1 = 2^{2n} \prod_{k=1}^n \sin^2\left(\frac{k\pi}{2(n+1)}\right)$ et

$$\text{par suite } \prod_{k=1}^n \sin\left(\frac{k\pi}{2(n+1)}\right) = \frac{\sqrt{n+1}}{2^n}.$$

5) a) Simple calcul de dérivation, en utilisant la relation :

$$(P(\cos \theta))' = -\sin \theta P'(\cos \theta).$$

b) En prenant $X = \cos \theta$ dans la question précédente, on obtient : $(X^2 - 1)T_n''(X) + 3XT_n'(X) - (n^2 + n)T_n(X) = 0$ pour $X \in [-1, 1]$, donc pour tout X , car un polynôme qui admet une infinité de racines est partout nul.

PARTIE II : Étude de l'endomorphisme L .

1) Il est clair que $L(P + \lambda Q) = L(P) + \lambda L(Q)$, d'autre part si P est un polynôme de degré inférieur à n , c'est aussi vrai pour $L(P)$, donc L est un endomorphisme de E .

2) a) D'après la question 5.b de la partie I, on a : $L(T_k) = (k^2 + 2k)T_k$

b) Ainsi $\lambda_k = k^2 + 2k$ tel que $0 \leq k \leq n$ sont les valeurs propres de L , dont le sous-espace propre associé est engendré par T_k et donc de dimension 1.

PARTIE III : Étude d'un produit scalaire.

1) Symétrie : $\varphi(P, Q) = \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} P(x) Q(x) dx = \varphi(Q, P)$

Bilinéarité :

$$\begin{aligned}
\varphi(P_1 + \lambda P_2, Q) &= \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} (P_1(x) + \lambda P_2(x)) Q(x) dx \\
&= \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} P_1(x) Q(x) dx + \lambda \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} P_2(x) Q(x) dx \\
&= \varphi(P_1, Q) + \lambda \varphi(P_2, Q)
\end{aligned}$$

D'où φ est linéaire à gauche, comme elle est symétrique, alors elle est aussi biléaire à droite.

Positive : $\varphi(P, P) = \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} P(x)^2 dx \geq 0$

Définie :

$$\begin{aligned} \varphi(P, P) = 0 &\implies \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} P(x)^2 dx = 0 \\ &\implies P^2 = 0 \text{ sur } [-1, 1] \text{ car } P^2 \text{ continue, positive} \\ &\implies P = 0 \text{ sur } [-1, 1] \\ &\implies P = 0 \text{ car c'est un polynôme} \end{aligned}$$

2) On a :

$$\begin{aligned} \varphi(L(P), Q) &= \int_{-1}^1 \left(3x\sqrt{1-x^2}P'(x) - (1-x^2)^{\frac{3}{2}}P''(x) \right) Q(x) dx \\ &= \int_{-1}^1 \left(-(1-x^2)^{\frac{3}{2}}P'(x) \right)' Q(x) dx \\ &= \left[\left(-(1-x^2)^{\frac{3}{2}}P'(x) \right) Q(x) \right]_{-1}^1 + \int_{-1}^1 (1-x^2)^{\frac{3}{2}}P'(x)Q'(x) dx \\ &= \int_{-1}^1 (1-x^2)^{\frac{3}{2}}P'(x)Q'(x) dx \end{aligned}$$

De la même façon, on montre que : $\varphi(P, L(Q)) = \int_{-1}^1 (1-x^2)^{\frac{3}{2}}P'(x)Q'(x) dx$, d'où l'égalité.

3) Soit $k \neq p$, on a :

$$\begin{aligned} \varphi(L(T_k), T_p) = \varphi(L(T_k), T_p) &\implies (k^2 + 2k)\varphi(T_k, T_p) = (p^2 + 2p)\varphi(T_k, T_p) \\ &\implies (k^2 + 2k - p^2 - 2p)\varphi(T_k, T_p) = 0 \\ &\implies (k-p)(k+p+2)\varphi(T_k, T_p) = 0 \\ &\implies \varphi(T_k, T_p) = 0 \end{aligned}$$

Et donc la famille $(T_k)_{0 \leq k \leq n}$ est orthogonale.

EXERCICE I

1) $\frac{\partial h}{\partial v} = 0 \iff h = Cte$ qui ne dépend pas de v mais seulement de u , donc $h(u, v) = h_1(u)$, comme h est de classe \mathcal{C}^1 , alors h_1 l'est aussi.

2) a) Φ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 , car ses fonctions coordonnées associées $\Phi_1 : (u, v) \mapsto ue^v$ et $\Phi_2 : (u, v) \mapsto e^{-v}$ sont de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 , en tant que produit et composé de fonctions de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 .

D'autre part, $\forall (x, y) \in \Omega, \exists! v = -\ln y \in \mathbb{R}$ tel que $y = e^{-v}$ et $\exists! u = xy \in \mathbb{R}$ tel que $x = ue^v$, donc $\exists!(u, v) \in \mathbb{R}^2$ tel que $(x, y) = \Phi(u, v)$, et donc Φ est bijective.

b) D'après ce qui précède, on a : $\Phi^{-1}(x, y) = (xy, -\ln y)$ qui est de classe \mathcal{C}^1 sur Ω , car ses fonctions coordonnées associées $\Phi_1^{-1} : (x, y) \mapsto xy$ et $\Phi_2 : (x, y) \mapsto -\ln y$ sont de classe \mathcal{C}^1 sur Ω , en tant que produit et composé de fonctions de classe \mathcal{C}^1 sur Ω .

3) a) $f^* = f \circ \Phi$ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 car Φ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 et f est de classe \mathcal{C}^1 sur $\Phi(\mathbb{R}^2) = \Omega$, avec les relations suivantes :

$$\frac{\partial f^*}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial f}{\partial y} = e^v \frac{\partial f}{\partial x}$$

$$\frac{\partial f^*}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial f}{\partial y} = ue^v \frac{\partial f}{\partial x} - e^{-v} \frac{\partial f}{\partial y}$$

b) D'après la question précédente, on a :

$\frac{\partial f^*}{\partial v} = ue^v \frac{\partial f}{\partial x} - e^{-v} \frac{\partial f}{\partial y} = x \frac{\partial f}{\partial x} - y \frac{\partial f}{\partial y} = 0$, donc $f^*(u, v) = F(u)$ et par suite $f(x, y) = f \circ \Phi(u, v) = f^*(u, v) = F(u) = F(xy)$, avec F de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}

4) a) Les application linéaires de \mathbb{R}^2 vers \mathbb{R} s'écrivent sous la forme $g(x, y) = \alpha x + \beta y$, donc $x \frac{\partial g}{\partial x} - y \frac{\partial g}{\partial y} = \alpha x + \beta y \iff \alpha x - \beta y = \alpha x + \beta y$, prendre donc $g(x, y) = \alpha x - \beta y$.

b) La solution générale, f de l'équation $x \frac{\partial f}{\partial x} - y \frac{\partial f}{\partial y} = \alpha x + \beta y$, s'écrit sous la forme $f = f_H + g$, où $f_H(x, y) = F(xy)$ est la solution générale de l'équation homogène sans second membre, et $g(x, y) = \alpha x - \beta y$ une solution particulière de l'équation avec second membre.

EXERCICE II

- 1) On a : $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u^3 + u) = A^3 + A = 0$, donc $u^3 + u = 0$ et $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u) = A \neq 0$, donc $u \neq 0$.
- 2) a) Si u était injectif, alors A inversible, donc $A^3 + A = 0$ devient en multipliant par A^{-1} , $A^2 + I_3 = 0$, d'où $u^2 + id_E = 0$. Ainsi $A^2 = -I_3$, donc $\det(A^2) = \det(-I_3)$, d'où $\det(A)^2 = -1$ ce qui est impossible, donc u injective.
- b) $u : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, donc $\dim(\text{Ker}(u)) \leq 3$. D'après la question précédente u est injective, donc $\dim(\text{Ker}(u)) \neq 0$ et aussi $u \neq 0$, donc $\text{Ker}(u) \neq \mathbb{R}^3$ et donc $\dim(\text{Ker}(u)) \neq 3$, d'où $\dim(\text{Ker}(u)) \in \{1, 2\}$.
- 3) $x \in \text{Ker}(u) \cap \text{Ker}(u^2 + id_E) \implies u(x) = 0_E, x = -u^2(x) = -u(0_E) = 0_E$, donc $\text{Ker}(u) \cap \text{Ker}(u^2 + id_E) = \{0_E\}$
D'autre part : $\forall x \in E$ on a : $x = x + u^2(x) - u^2(x)$ avec $u(x + u^2(x)) = u(x) + u^3(x) = 0_E$ et $(u^2 + id_E)(-u^2(x)) = -(u^4(x) + u^2(x)) = -u(u^3(x) + u(x)) = -u(0_E) = 0_E$, donc $E = \text{Ker}(u) \oplus \text{Ker}(u^2 + id_E)$, et donc $\dim(\text{Ker}(u^2 + id_E)) = \dim(E) - \dim(\text{Ker}(u)) = 3 - \dim(\text{Ker}(u)) \in \{1, 2\}$, car $\dim(\text{Ker}(u)) \in \{1, 2\}$
- 4) a) Soit $x \in F = \text{Ker}(u^2 + id_E)$, donc $u^2(x) + x = 0_E$, d'où $u^3(x) + u(x) = u(0_E) = 0_E$, donc $(u^2 + id_E)(u(x)) = 0_E$, d'où $u(x) \in \text{Ker}(u^2 + id_E) = F$, donc F est stable par F .
- b) $x \in F \implies u^2(x)x = -x \implies v^2(x) = -x \implies v^2 = -id_F$.
- c) $\det(v^2) = \det(-id_F) = (-1)^{\dim(F)}$, or $\det(v^2) = \det(v)^2 \geq 0$, et $\dim(F) \in \{2, 3\}$, d'où $\dim(F) = 2$.

- d) Soit λ une valeur réelle de v , et x un vecteur propre associé, alors $v(x) = \lambda x$ et donc $-x = v^2(x) = v(\lambda x) = \lambda v(x) = \lambda^2 x$, d'où $\lambda^2 = -1$, impossible.
- 5) a) Soit λ, μ réels tel que $\lambda e'_2 + \mu e'_3 = 0_E$, on compose par u , d'où $\lambda e'_3 - \mu e'_2 = 0_E$, car $u(e'_2) = e'_3$ et $u(e'_3) = u^2(e'_2) = v^2(e'_2) = -e'_2$, puisque $e'_2 \in F$, F stable par u , $u = v$ sur F et $v^2 = -id_F$.
On obtient alors le système suivant :
$$\begin{cases} \lambda e'_2 + \mu e'_3 = 0_E & (1) \\ -\mu e'_2 + \lambda e'_3 = 0_E & (2) \end{cases}$$
 $\lambda \times (1) - \mu \times (2) \implies (\lambda^2 + \mu^2)e'_2 = 0_E \implies \lambda^2 + \mu^2 = 0 \implies \lambda = \mu = 0$, donc la famille (e'_2, e'_3) est libre.
- b) Comme $\text{Card}(\mathcal{B}') = \dim(E) = 3$, pour montrer que c'est une base, il suffit de montrer qu'elle est libre.
En effet, soit a, b, c des réels tel que $ae'_1 + be'_2 + ce'_3 = 0_E$, on compose par u , on obtient alors : $be'_3 - ce'_2 = 0$ car $u(e'_1) = 0_E, u(e'_2) = e'_3, u(e'_3) = -e'_2$, or la famille (e'_2, e'_3) est libre, donc $b = c = 0$ et par suite $ae'_1 = 0_E$, d'où $a = 0$, donc la famille (e'_1, e'_2, e'_3) est libre.

Fin.