DS 6 : 2004–2005. Espaces vectoriels Fractions rationnelles Developpements limités

Durée : 3 heures

Problème I :
Le problème est tiré de l'épreuve ESSEC 2003, Prépa economie Math 1, option Scientifique.
Dans tout le problème, on désigne par n un entier naturel et par : $\mathbb{R}_n[x]$ l'espace vectoriel des fonctions–polynômes de degré inférieur ou égal à n.
$\mathcal{C}^n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions réelles de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$. En particulier, $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ est l'espace vectoriel des fonctions réelles continues sur $\mathbb{R}$.
A toute fonction f appartenant à $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$, on associe l'application notée $\phi(f)$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\phi(f)(x) = \int_{x-1}^{x} f(t)dt$$

On définit ainsi un endomorphisme ϕ de l'espace vectoriel $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ dont on se propose dans la suite d'étudier quelques propriétés au travers de parties qui sont largement indépendantes.

1. Dans cette question, on étudie quelques propriétés de $\phi(f)$ en fonction de celles de f.
   (a) (0.5 pts) Prouver l'égalité suivante, pour toute fonction continue f et tout nombre réel x :
   $$\phi(f)(x) = \int_0^1 f(x+u-1)du$$
   (b) (0.75 pts) On suppose la fonction f paire (resp. impaire). Exprimer $\phi(f)(-x)$ en fonction de $\phi(f)(x+1)$.
   (c) (0.75 pts) On suppose la fonction f croissante (resp. décroissante). Est-ce le cas de $\phi(f)$?
   (d) (0.75 pts) On suppose la fonction f convexe (resp. concave). Est-ce le cas de $\phi(f)$?
   (e) (0.75 pts) On suppose que la fonction f a une limite finie L en ∞. Est-ce le cas de $\phi(f)$?
2. (0.75 pts) Montrer que $R_n[x]$ est stable par ϕ.
3. Dans cette question, on étudie l'injectivité et la surjectivité de ϕ.
   (a) (0.5 pts) Montrer, pour toute fonction f de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$, que $\phi(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ et préciser sa dérivée.
   (b) (0.75 pts) Montrer que $\operatorname{Ker}\phi$ est formé des fonctions 1–périodiques et d'intégrale nulle sur $[0,1]$.

(c) (0.75 pts) L'endomorphisme ϕ est–il injectif ? surjectif ?

4. Dans cette question on étudie les éléments propres de ϕ.
   (a) (0.75 pts) On considère une valeur propre λ, de l'endomorphisme ϕ, autrement dit un nombre réel λ tel qu'il existe une fonction non nulle f appartenant à $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ vérifiant $\phi(f) = \lambda f$, f s'appelle fonction propre de ϕ associée à la valeur propre λ.
   Montrer que tout fonction propre f associée à une valeur propre $\lambda \neq 0$ est necéssairement de $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
   (b) (0.5 pts) Quelles sont les fonctions polynômiales qui sont des fonctions propre de ϕ ?
   (c) (0.5 pts) Montrer, pour tout réel $\lambda > 0$, qu'il existe une et une seule fonction exponentielle définie par $f(x) = e^{\alpha x}$ telle que $\phi(f) = \lambda f$.
   En déduire que tout réel, $\lambda > 0$ est une valeur propre de ϕ.

Problème II :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ deux à deux distincts et tous différents de 1 et -1, on pose $Q(X) = \prod_{k=1}^{n} (X - a_k)$ et $F(X) = \dfrac{1}{(X^2-1)Q^2(X)}$.

1. (0.25 pts) Dire pourqui la décomposition en élèments simple de la fraction $F(X)$ est
$$F(X) = \frac{\alpha}{X-1} + \frac{\beta}{X+1} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{X-a_k} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\beta_k}{(X-a_k)^2}$$
2. (0.5 pts) Exprimer α et β en fonction de $Q(1)$ et $Q(-1)$.
3. (0.5 pts) Exprimer β_k en fonction de a_k et $Q'(a_k)$.
4. (1 pt) Montrer que : $\alpha_k = \frac{(a_k^2-1)Q''(a_k)+2a_kQ'(a_k)}{(a_k^2-1)^2Q'^2(a_k)}$.
5. On pose $P(X) = (X^2-1)Q''(X) + 2XQ'(X)$.
   (a) (0.75 pts) Donner le degré de P, ainsi que son coefficient dominant.
   (b) (1 pt) Montrer que $(\alpha_k = 0 \quad \forall k \in [|1, n|]) \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $P(X) = \lambda Q(X)$.
   (c) (0.5 pts) Exprimer λ en fonction de n.
   (d) (1 pt) Donner Q dans le cas particulier où $n = 2$.

Exercices de calcul.

Chaque exercice est noté sur 2 pts, et il sera tenu compte de l'exactitude des calculs mais aussi de la méthode utilisée en cas d'erreur de calcul.

1. Donner la décomposition en élèments simples de la fraction : $F(X) = \frac{X^3-X}{(X^2+1)(X^2-1)^2}$.
2. Donner la limite de la suite réelle $u_n = (n+1)^{\frac{n+1}{n}} - n^{\frac{n}{n-1}}$.
3. Donner la limite en 1 de la fonction $f(x) = (2-x)^{\tan(\frac{\pi x}{2})}$.
4. Étudier les branches infinies en $+\infty$ de la fonction $g(x) = x(1+\frac{1}{x})^x - ex^2\ln(1+\frac{1}{x})$.

FIN DE L'ÉNONCÉ.
BONNE CHANCE.