

CPGE My Youssef, Rabat



بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ  
رَبِّي إِشْرَحْ لِي صَدْرِي وَ يَسِّرْ لِي أَمْرِي وَ  
أَحْلِلْ عُقْدَةَ مِنْ لِسَانِي يَفْقَهُوا قَوْلِي

صَدَقَ اللَّهُ الْعَظِيمِ  
سورة طه

## Contrôle Blanc: *Polynômes* *Fractions rationnelles*

Jeudi 30 Avril 2009  
Durée : 1 heure

### *Blague du jour :*

- Deux canards sont sur une rive, ils se regardent. L'un dit : " Coin Coin !!"  
L'autre dit : " Ben merde ! J'allais dire la même chose !!"  
-Comment fait-on aboyer un chat ? On lui donne une tasse de lait et il la boit !



### *Mathématicien du jour*

*Ibn Rochd-Averroès*

Abu'l-Walid Muhammad ibn Rouchd de Cordoba (1126-1198, au Maroc), connu aussi sous son nom latinisé d'Averroès, est à la fois un philosophe, un théologien islamique, un juriste, un mathématicien et un médecin musulman andalou.

Son oeuvre est reconnue en Europe Occidentale mais combattue dans le monde musulman , où ses oeuvres sont brûlées et aussitôt oubliée après sa mort. Certains vont jusqu'à le décrire comme l'un des pères fondateurs de la pensée laïque en Europe de l'Ouest.

### *Conseils pour la rédaction et la présentation des copies.*

- Chaque variable utilisée dans une démonstration doit être définie.
- L'énoncé ne doit pas être recopié sur les copies.
- Chaque résultat annoncé doit être justifié en citant précisément le théorème du cours avec ses hypothèses exactes utilisé ou en citant le numéro de la question précédente utilisée.
- Les résultats importants doivent être simplifiés et encadrés.
- Les calculs doivent être détaillés et expliqués à l'aide de phrases simples.
- Laisser une marge à gauche de chaque feuille, en tirant un trait vertical, et un horizontal de la 1ère double feuille pour la note et les remarques du correcteur.
- Numéroté les double feuille de la façon suivante :  $1/n, 2/n, \dots, n/n$  où  $n$  est le nombre total de double feuille.
- Les questions doivent être traités dans l'ordre de l'énoncé.
- Tirer deux traits diagonaux pour rayer une partie du raisonnement que vous considérez fausse.

Exercice 1 :

Source : DS, PCSI-France

Une suite  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de polynômes de  $\mathbb{R}[X]$  est définie par la donnée de  $P_0 = X$  et la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad P_{n+1}(X) = (n+1) \int_0^X P_n(t) dt + X \left[ 1 - (n+1) \int_0^1 P_n(t) dt \right].$$

1. Calculer  $P_1, P_2, P_3$  et  $P_4$ .
2. Montrer que, pour tout  $n$ ,  $P_n$  est l'unique polynôme de  $\mathbb{R}[X]$  vérifiant les deux conditions

$$P_n(0) = 0 \quad \text{et} \quad P_n(X) - P_n(X-1) = X^n.$$

3. Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , le polynôme  $P_n$  est divisible par  $X^2 + X$ . Factoriser les polynômes  $P_1, P_2$  et  $P_3$ . Ecrire  $P_4$  sous la forme  $X(X+1)Q_4$ .

4. Montrer que le polynôme  $P_n$  est de degré  $n+1$ , calculer son coefficient dominant, ainsi que le coefficient de  $X^n$ .

5. Montrer que, pour tous  $n \in \mathbb{N}$  et  $p \in \mathbb{N}^*$ , on a  $P_n(p) = \sum_{k=1}^p k^n$ .

Exercice 2

- 1) Soit  $Q(X) = X^6 - 2X^5 + X^4 - X^3 + 2X^2 - X$ .
  - a) Donner une racine évidente de  $Q$ .
  - b) Montrer que 1 est une racine de  $Q$ , préciser sa multiplicité.
  - c) Factoriser  $Q$  en polynômes irréductibles dans  $\mathbb{R}[X]$ , puis dans  $\mathbb{C}[X]$ .
- 2) On pose  $P(X) = 2X + 1$  et  $F(X) = \frac{P(X)}{Q(X)}$ .
  - a) Donner la partie entière de  $F$ .
  - b) Préciser les pôles de  $F$ , ainsi que leurs multiplicités.
  - c) Donner la forme de la décomposition en éléments simples de  $F$  dans  $\mathbb{C}(X)$ , sans faire aucun calcul.
  - d) Donner la décomposition en éléments simples de  $F$  dans  $\mathbb{C}(X)$ , en justifiant correctement vos calculs.
  - e) En déduire la décomposition en éléments simples de  $F$  dans  $\mathbb{C}(X)$

*Fin*  
*Bonne chance*