

CPGE My Youssef, Rabat



بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ
رَبِّي إِشْرَحْ لِي صَدْرِي وَ يَسِّرْ لِي أَمْرِي وَ
أَحْلِلْ عُقْدَةَ مِنْ لِسَانِي يَفْقَهُوا قَوْلِي

صَدَقَ اللَّهُ الْعَظِيمِ
سورة طه

Contrôle Blanc: *Polynômes* *Fractions rationnelles*

Jeudi 30 Avril 2009

Durée : 1 heure

Blague du jour :

- Deux canards sont sur une rive, ils se regardent. L'un dit : " Coin Coin !!"
L'autre dit : " Ben merde ! J'allais dire la même chose !!"
-Comment fait-on aboyer un chat ? On lui donne une tasse de lait et il la boit !



Mathématicien du jour

Ibn Rochd-Averroès

Abu'l-Walid Muhammad ibn Rouchd de Cordoba (1126-1198, au Maroc), connu aussi sous son nom latinisé d'Averroès, est à la fois un philosophe, un théologien islamique, un juriste, un mathématicien et un médecin musulman andalou.

Son oeuvre est reconnue en Europe Occidentale mais combattue dans le monde musulman , où ses oeuvres sont brûlées et aussitôt oubliée après sa mort. Certains vont jusqu'à le décrire comme l'un des pères fondateurs de la pensée laïque en Europe de l'Ouest.

Conseils pour la rédaction et la présentation des copies.

- Chaque variable utilisée dans une démonstration doit être définie.
- L'énoncé ne doit pas être recopié sur les copies.
- Chaque résultat annoncé doit être justifié en citant précisément le théorème du cours avec ses hypothèses exactes utilisé ou en citant le numéro de la question précédente utilisée.
- Les résultats importants doivent être simplifiés et encadrés.
- Les calculs doivent être détaillés et expliqués à l'aide de phrases simples.
- Laisser une marge à gauche de chaque feuille, en tirant un trait vertical, et un horizontal de la 1ère double feuille pour la note et les remarques du correcteur.
- Numéroter les double feuille de la façon suivante : $1/n, 2/n, \dots, n/n$ où n est le nombre total de double feuille.
- Les questions doivent être traités dans l'ordre de l'énoncé.
- Tirer deux traits diagonaux pour rayer une partie du raisonnement que vous considérez fausse.

Exercice 1 :

Source : DS, PCSI-France

Une suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ est définie par la donnée de $P_0 = X$ et la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad P_{n+1}(X) = (n+1) \int_0^X P_n(t) dt + X \left[1 - (n+1) \int_0^1 P_n(t) dt \right].$$

1. Calculer P_1, P_2, P_3 et P_4 .
2. Montrer que, pour tout n , P_n est l'unique polynôme de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant les deux conditions

$$P_n(0) = 0 \quad \text{et} \quad P_n(X) - P_n(X-1) = X^n.$$

3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le polynôme P_n est divisible par $X^2 + X$. Factoriser les polynômes P_1, P_2 et P_3 . Ecrire P_4 sous la forme $X(X+1)Q_4$.

4. Montrer que le polynôme P_n est de degré $n+1$, calculer son coefficient dominant, ainsi que le coefficient de X^n .

5. Montrer que, pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}^*$, on a $P_n(p) = \sum_{k=1}^p k^n$.

Exercice 2

- 1) Soit $Q(X) = X^6 - 2X^5 + X^4 - X^3 + 2X^2 - X$.
 - a) Donner une racine évidente de Q .
 - b) Montrer que 1 est une racine de Q , préciser sa multiplicité.
 - c) Factoriser Q en polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$, puis dans $\mathbb{C}[X]$.
- 2) On pose $P(X) = 2X + 1$ et $F(X) = \frac{P(X)}{Q(X)}$.
 - a) Donner la partie entière de F .
 - b) Préciser les pôles de F , ainsi que leurs multiplicités.
 - c) Donner la forme de la décomposition en éléments simples de F dans $\mathbb{C}(X)$, sans faire aucun calcul.
 - d) Donner la décomposition en éléments simples de F dans $\mathbb{C}(X)$, en justifiant correctement vos calculs.
 - e) En déduire la décomposition en éléments simples de F dans $\mathbb{C}(X)$

Fin
Bonne chance