DS 6 : *Intégration sur un segment. Équations différentielles. Fractions rationnelles.*

Maths-PCSI.
Mr Mamouni : *myismail@altern.org*

Samedi 18 Mars 2006.
Durée: 4 heures.

CORRIGÉ

Exercices de calcul.

1)

```
> int((x-1)/((x+1)*sqrt(-x^2+4*x+5)),x=0..1);
```

$$\arcsin(2/3) - 2/3\sqrt{5} - \arcsin(1/3) + 2/3\sqrt{2}$$

2)

```
> convert((2*x-1)/(x*(x-1)^2*(x+1)^3),parfrac,x);
```

$$-x^{-1} + 3/4\,(x+1)^{-3} - 1/16\,(x-1)^{-1} + \frac{17}{16}\,(x+1)^{-1} + 1/8\,(x-1)^{-2} + (x+1)^{-2}$$

3)

```
> Equation1 := (x^3-1)*diff(y(x),x)+x*y(x)=x;
```

$$Equation1 := (x^3-1)\frac{d}{dx}y(x) + xy(x) = x$$

```
> Solution1:= dsolve(Equation1);
```

$$Solution1 := y(x) = 1 + \frac{\sqrt[6]{x^2+x+1}\,e^{-1/3\sqrt{3}\arctan((2/3\,x+1/3)\sqrt{3})}\_C1}{\sqrt[3]{x-1}}$$

4)

```
> ch(x):=(exp(x)+exp(-x))/2;
```

$$ch(x) := 1/2\,e^{x} + 1/2\,e^{-x}$$

```
> Equation2 := diff(y(x),x,x)-2*diff(y(x),x)+2*y(x)=x*cos(x)*ch(x);
```

$$Equation2 := \frac{d}{d`\$`(x,2)}y(x) - 2\frac{d}{dx}y(x) + 2\,y(x) = x\cos(x)\,(1/2\,e^{x} + 1/2\,e^{-x})$$

```
> Solution2:= dsolve(Equation2);
```

$$Solution2 := y(x) = e^{x}\sin(x)\,\_C2 + e^{x}\cos(x)\,\_C1 + 1/32\,e^{-x}\,(4\,x\cos(x) + 4\,\sin(x)\,x^2 - 4\,\sin(x))\,e^{2\,x} + 1/32\,e^{-x}\,(2\,x\cos$$

```
> expand(subs(x=0,Solution2));
```

$$y(0) = 1/32 + \_C1$$

```
> expand(subs(x=0,op(2,diff(Solution2,x))));
```

$$-1/32 + \_C2 + \_C1$$

```
> with(linalg):
> A := matrix( [[1,0],[1,1]] ):
> b := vector( [-1/32,33/32]):
> Sol:=linsolve(A, b):C1:=Sol[1];C2:=Sol[2];
```

$$C1 := -1/32$$
$$C2 := \frac{17}{16}$$

II] Deuxième problème.

II.1.a. $A(0) = \dfrac{\pi}{2}$, et $A(1) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)dx = [\sin(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$

II.1.b. Soit λ et μ deux réels positifs et $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, alors :

$$\begin{aligned}\lambda \leq \mu \quad & \Longrightarrow \lambda \ln(\cos(x)) \geq \mu \ln(\cos(x)) \quad \text{car } \ln(\cos(x)) \leq 0 \\ & \Longrightarrow e^{\lambda \ln(\cos(x))} \geq e^{\mu \ln(\cos(x))} \\ & \cos(x)^{\lambda} \geq \cos(x)^{\mu} \\ & A(\lambda) \geq A(\mu)\end{aligned}$$

Donc la fonction A est décroissante sur $\mathbb{R}^+$.

II.1.c. Pour cela, on utilise une intégration par partie.

$$\begin{aligned} A(n+2) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)^{n+2} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)' \cos(x)^{n+1} dx \\ &= [\sin(x)\cos(x)^{n+1}]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)^2 \cos(x)^n dx \\ &= (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos(x)^2)\cos(x)^n dx \\ &= (n+1)(A(n) - A(n+2)) \end{aligned}$$

D'où $(n+2)A(n+2) = (n+1)A(n)$, et donc $A(n+2) = \dfrac{n+1}{n+2}A(n)$.

II.1.d. $A(2p) = \dfrac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\dfrac{\pi}{2}$ se démontre facilement par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$, en utilisant la relation : $A(2p+2) = \dfrac{2p+1}{2p+2}A(2p)$.

De façon similaire on démontre que $A(2p+1) = \dfrac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}$.

II.2.a. D'aprés la question **II.1.b.**, la suite $(A(n))$ est décroissante, donc $A(n) \leq A(n-1) \leq A(n-2)$, d'où $1 \leq \dfrac{A(n-1)}{A(n)} \leq \dfrac{A(n-2)}{A(n)}$, d'autre part d'aprés la question **II.1.c.** on a : $A(n) = \dfrac{n-1}{n}A(n-2)$, d'où : $\dfrac{A(n-2)}{A(n)} = \dfrac{n}{n-1}$. Et donc $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \dfrac{A(n-1)}{A(n)} = 1$.

II.2.b. Posons $w_n = nA(n)A(n-1)$, alors $\dfrac{w_{n+1}}{w_n} = \dfrac{(n+1)A(n+1)A(n)}{nA(n)A(n-1)} = \dfrac{n+1}{n}\dfrac{A(n+1)}{A(n-1)} = 1$, en utilisation la relation de la question **II.1.c.**

On a $A(n) \sim A(n-1)$ d'aprés **II.2.a.** ainsi $nA(n)^2 \sim nA(n)A(n-1) = w_n = w_1 = A(1)A(0) = \dfrac{\pi}{2}$, d'où $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} nA(n)^2 = \dfrac{\pi}{2}$.

II.3.a. $n = [\lambda]$, donc $n \leq \lambda \leq n+1$, or la fonction A est décroissante donc $A(n+1) \leq A(\lambda) \leq A(n)$, d'où $\dfrac{A(n+1)}{A(n)} \leq \dfrac{A(\lambda)}{A(n)} \leq 1$.

II.3.b. Comme $n \leq \lambda \leq n+1$, alors $\lambda \longrightarrow +\infty \Longrightarrow n \longrightarrow +\infty$, or $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \dfrac{A(n+1)}{A(n)} = 1$, donc $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \dfrac{A(\lambda)}{A(n)} = 1$, d'où $A(\lambda) \sim A(n)$

II.3.b. On sait que $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} nA(n)^2 = \dfrac{\pi}{2}$, d'où $A(n) \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$, d'où

$$A(\lambda) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}} \sim \sqrt{\frac{\pi}{2\lambda}}.$$

II.4.a. $\dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{p+1} = \dfrac{1}{p(p+1)}$, or $p^2 \leq p(p+1) \leq (p+1)^2$, d'où $\dfrac{1}{p^2} \geq \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{p+1} \geq \dfrac{1}{(p+1)^2}$.

II.4.b. Il est clair que la suite $\left(\displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^2}\right)$ est croissante, et d'aprés la question précédente, on a $\displaystyle\sum_{p=2}^{n} \frac{1}{p^2} \leq \sum_{p=2}^{n} \frac{1}{p-1} - \frac{1}{p} = 1 - \frac{1}{n} \leq 1$ donc est majorée par 1 et par suite convergente, dont la limite est aussi majorée par 1.

II.4.c. On a :

$$\begin{aligned} \left|\int_0^1 g(x)\sin(2n\pi x)dx\right| &= \left|-\left[g(x)\frac{\cos(2n\pi x)}{2n\pi}\right]_0^1 + \int_0^1 g'(x)\frac{\cos(2n\pi x)}{2n\pi}dx\right| \\ &= \left|\frac{g(0)-g(1)}{2n\pi} + \int_0^1 g'(x)\frac{\cos(2n\pi x)}{2n\pi}dx\right| \\ &\leq \frac{|g(0)|+|g(1)|}{2n\pi} + \frac{\sup|g'(x)|}{2n\pi}\int_0^1 dx \\ &= \frac{|g(0)|+|g(1)|+\sup|g'(x)|}{2n\pi} \\ &= \frac{b}{n} \qquad \text{avec } b = \frac{|g(0)|+|g(1)|+\sup|g'(x)|}{2\pi} \end{aligned}$$

II.4.d. On $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos(2k\pi x)$ est la partie réelle de :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} e^{2ik\pi x} &= e^{2i\pi x}\sum_{k=0}^{n-1} e^{2ik\pi x} &&= e^{2i\pi x}\sum_{k=0}^{n-1}\left(e^{2i\pi x}\right)^k\\ &= e^{2i\pi x}\frac{1-e^{2in\pi x}}{1-e^{2i\pi x}} &&= e^{2i\pi x}\frac{2\sin(n\pi x)e^{in\pi x}}{2\sin(\pi x)e^{i\pi x}}\\ &= \frac{\sin(n\pi x)}{\sin(\pi x)}e^{i(n+1)\pi x}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{D'où}\quad 2\sum_{k=1}^{n}\cos(2k\pi x) &= 2\frac{\sin(n\pi x)}{\sin(\pi x)}\cos((n+1)\pi x)\\ &= 2\sin(n\pi x)\cos(n\pi x)\mathrm{cotan}(\pi x) - 2\sin^2(n\pi x)\\ &= \mathrm{cotan}(\pi x)\sin(2n\pi x)+\cos(2n\pi x)-1\end{aligned}$$

II.4.e.
$$\begin{aligned} I_k &= \int_0^1 \frac{x(x-1)}{2}\cos(2k\pi x)dx\\ &= \int_0^1 \frac{x(x-1)}{2}\left(\frac{\sin(2k\pi x)}{2k\pi}\right)' dx\\ &= \left[\frac{x(x-1)}{2}\frac{\sin(2k\pi x)}{2k\pi}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{2x-1}{2}\frac{\sin(2k\pi x)}{2k\pi}dx\\ &= -\int_0^1 \frac{2x-1}{2}\left(\frac{-\cos(2k\pi x)}{(2k\pi)^2}\right)' dx\\ &= \left[\frac{(2x-1)}{2}\frac{\cos(2k\pi x)}{(2k\pi)^2}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{\cos(2k\pi x)}{(2k\pi)^2}dx\\ &= \frac{1}{(2k\pi)^2} - \left[\frac{\sin(2k\pi x)}{(2k\pi)^3}\right]_0^1\\ &= \frac{1}{(2k\pi)^2}\end{aligned}$$

L'autre relation de cette question s'obtient en multipliant la relation de **II.4.d.** par $\dfrac{x(x-1)}{4}$, puis intégrer entre 0 et 1.

II.4.f. D'aprés la question précédente $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} = 4\pi^2\sum_{k=1}^{n} I_k = 2\pi^2\int_0^1 f(x)\sin(2n\pi x)dx + \pi^2\int_0^1 x(x-1)\cos(2n\pi x)dx - \pi^2\int_0^1 x(x-1)dx$.

Or $\displaystyle\left|\int_0^1 f(x)\sin(2n\pi x)dx\right| \leq \frac{b}{n}$, d'aprés la question **II.4.c.**, donc $\displaystyle\lim_{n\longrightarrow+\infty}\int_0^1 f(x)\sin(2n\pi x)dx = 0$, de la même façon on montre que $\displaystyle\left|\int_0^1 x(x-1)\cos(2n\pi x)dx\right| \leq \frac{c}{n}$, d'où $\displaystyle\lim_{n\longrightarrow+\infty}\int_0^1 x(x-1)\cos(2n\pi x)dx = 0$, et donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2} = \lim_{n\longrightarrow+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} = \lim_{n\longrightarrow+\infty}\sum_{k=1}^{n} I_k = -\pi^2\int_0^1\frac{x(x-1)}{2}dx = \frac{\pi^2}{6}$.

II.5.a. Simple calcul à faire à la main, on le donne ici à l'aide de Maple.

```
> v:=n->n^(n+1/2)/(n!*exp(n));
```

$$v := n \mapsto \frac{n^{n+1/2}}{n!\,e^n}$$

```
> delta_n:=expand(ln(expand(v(n+1)/v(n))));
```

$$delta\_n := -1+\ln\left(\frac{(n+1)^n\sqrt{n+1}}{n^n\sqrt{n}}\right)$$

```
> taylor(delta_n,n=+infinity,4);
```

$$1/12\,n^{-2}+O\left(n^{-3}\right)$$

II.5.b. $\displaystyle\lim_{n\longrightarrow+\infty}\varepsilon_n = 0$, donc d'aprés la définition de la limite $\exists n_0\in\mathbb{N}$ tel que $\forall n > n_0$, on a : $\varepsilon_n < \dfrac{1}{12}$, pendre $\varepsilon = \dfrac{1}{12}$, d'où $0<\delta<\dfrac{K}{n^2}$, où $K=\dfrac{1}{6}$.

II.5.c. La suite $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^{n}\delta_k\right)_{n\geq 2}$ est croissante, car $\delta_k>0$ et majorée par la suite $\displaystyle K\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\right)_{n\geq 2}$ qui elle même majorée par $K\dfrac{\pi^2}{6}$, donc elle converge.

II.5.d.
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\delta_k \text{ converge} &\Longrightarrow \sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{v_{k+1}}{v_k}\right)\text{ converge}\\ &\Longrightarrow \sum_{k=1}^{n}\ln(v_{k+1})-\ln(v_k)\text{ converge}\\ &\Longrightarrow \ln(v_{n+1})-\ln(v_1)\text{ converge}\\ &\Longrightarrow \ln(v_n)\text{ converge}\\ &\Longrightarrow v_n\text{ converge}\end{aligned}$$

Et sa limite est strictement positive, puisque c'est une exponentielle.

II.5.e. Posons $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} v_n = l > 0$, alors $v_n = \dfrac{n^n\sqrt{n}}{n!e^n} \sim l$, d'où $n! \sim kn^ne^{-n}\sqrt{n}$, avec $k = \dfrac{1}{l}$, d'où $n! = kn^ne^{-n}\sqrt{n}(1+\varepsilon_n)$ tel que $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \varepsilon_n = 0$.

II.5.e. D'aprés la question **II.1.d.**, on a : $A(2n) = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\dfrac{\pi}{2}$, or $(2n)! \sim k(2n)^{2n}e^{-2n}\sqrt{2n}$ et $(n!)^2 \sim k^2n^{2n}e^{-2n}n$, donc $A(2n) \sim \dfrac{\sqrt{2}}{k\sqrt{n}}\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\pi}{k\sqrt{2n}}$. D'aute part, d'aprés la question **II.2.b.**, on a : $2nA^2(2n) \sim \dfrac{\pi}{2}$, d'où $A(2n) \sim \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{n}}$, d'où $\dfrac{\pi}{k\sqrt{2n}} = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{n}}$, et par suite $k = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$.

II.7. On fera les application numériques à l'aide de Maple.

II.7.a.

```
> C:=n->(2*n)!/n!^2;
```

$$C := n \mapsto \frac{(2\,n)!}{(n!)^2}$$

II.7.b.

```
> C(10);C(50);C(100);
```

184756
100891344545564193334812497256
90548514656103281165404177077484163874504589675413336841320

II.7.c.

```
> equivalent:=n->sqrt(n/Pi)*2^(2*n);
```

$$equivalent := n \mapsto \sqrt{\frac{n}{\pi}}2^{2\,n}$$

```
> evalf(equivalent(10));evalf(equivalent(50));evalf(equivalent(100));
```

1870789.729
$5.057194210 \times 10^{30}$
$9.066177058 \times 10^{60}$

EXERCICE 2.

Partie 1 *Etude de la bijection réciproque de f.*

1) $f'(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos^2(x)} > 0$ sur $[0,\dfrac{\pi}{4}]$, donc f est strictement croissante sur $[0,\dfrac{\pi}{4}]$, et par suite réalise une bijection de $I = [0,\dfrac{\pi}{4}]$ sur $J = f(I) = f([0,\dfrac{\pi}{4}]) = [f(0), f(\dfrac{\pi}{4})] = [1,\sqrt{2}]$.

2)

3) $\dfrac{1}{\cos\left(f^{-1}(x)\right)} = f\left(f^{-1}(x)\right) = x$, d'où $\cos\left(f^{-1}(x)\right) = \dfrac{1}{x}$.
D'autre part : $\sin^2\left(f^{-1}(x)\right) + \cos^2\left(f^{-1}(x)\right) = 1$ et $\sin\left(f^{-1}(x)\right) \geq 0$, car $f^{-1}(x) \in [1,\sqrt{2}] \subset [0,\pi]$, d'où $\sin\left(f^{-1}(x)\right) = \sqrt{1-\cos^2\left(f^{-1}(x)\right)} = \sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}$.

4) f est dérivable sur I, avec $f'(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos^2(x)} \neq 0 \iff x \neq 0$, d'où f^{-1} est dérivable sur $J - \{f(0)\} = J - \{1\}$, avec $\left(f^{-1}\right)'(x) = \dfrac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)} = \dfrac{\cos^2\left(f^{-1}(x)\right)}{\sin\left(f^{-1}(x)\right)} = \dfrac{1}{x^2\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}} = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$.

5) Faisons les calculs à l'aide de Maple.

$$g := x \mapsto \arccos\left(x^{-1}\right)$$

```
> g(sqrt(2))+int(series(1/(x*sqrt(x^2-1)),x=sqrt(2),1),x);
```

$$1/4\,\pi + series\left(1/2\,\sqrt{2}\left(x-\sqrt{2}\right) + O\left(\left(x-\sqrt{2}\right)^2\right), x = \sqrt{2}, 2\right)$$

Partie 2 *Etude des dérivés successives de f.*

1) $x \mapsto \cos(x)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I, avec $\cos(x) \neq 0, \forall x \in I$, d'où $f(x) = \dfrac{1}{\cos(x)}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I.

2) Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$, et on trouve la relation suivante :

$$P_{n+1}(\sin(x)) = \cos^2(x)P_n'(\sin(x)) + (n+1)\sin(x)P_n(\sin(x))$$

3) On a : $f'(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos^2(x)}$ et $f''(x) = \dfrac{\cos^3(x)+2\cos(x)\sin^2(x)}{\cos^4(x)} = \dfrac{\cos^2(x)+2\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \dfrac{1+\sin^2(x)}{\cos^2(x)}$, donc $P_1(X) = X, P_2(X) = 1+X^2$.

4) En prenant $X = \cos(x)$ dans la question **2.)**, on a : $P_{n+1}(X) = (1-X^2)P_n'(X) + (n+1)XP_n(X)$, d'où l'égalite sur $[-1,1]$, et comme il s'agit de polynômes alors on a égalité sur $\mathbb{R}$ tout entier.
$P_3(X) = (1-X^2)2X + 3X(1+X^2) = 5X + X^3$.

5) On montre par récurrence sur $n \geq 1$ que : $deg(P_n) = n$ et $\text{co}(P) = 1$.
En effet le résultat est vrai pour $n = 1$.
Supposons que : $deg(P_n) = n$ et $\text{co}(P) = 1$, alors $deg((1-X^2)P_n'(X)) = n+1$ et $\text{co}((1-X^2)P_n'(X)) = -n$ et $deg((n+1)XP_n(X)) = n+1$ et $\text{co}((n+1)XP_n(X)) = n+1$, ainsi $\text{co}((1-X^2)P_n'(X)) + \text{co}((n+1)XP_n(X)) = 1 \neq 0$, d'où $deg(P_{n+1}(X) = n+1$ et $\text{co}(P_{n+1}(X)) = 1$.

Partie 3 *Etude de la suite d'intégrales.*

1) I_n est bien définie car la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\cos^n(x)}$ est continue sur $[0, \dfrac{\pi}{4}]$.

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2(x)} dx = [\tan(x)]_0^{\frac{\pi}{4}} = 1.$$

2) Tout calcul fait on trouve $a = b = \dfrac{1}{2}$.

3) En posant $t = \sin(x)$, on obtient $I_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dt = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

4) $0 \leq \cos x \leq 1, \forall x \in I$, donc $\cos^{n+1}(x) \leq \cos^n(x)$, d'où $\dfrac{1}{\cos^{n+1}(x)} \geq \dfrac{1}{\cos^n(x)}$ et donc $I_{n+1} \geq I_n$, d'où la suite (I_n) est croissante.

5)
$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^n(x)} dx \\ &\geq \int_{\frac{\pi}{4}-\frac{1}{n^2}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^n(x)} dx & \text{car } \frac{1}{\cos^n(x)} \geq 0 \\ &\geq \frac{1}{\cos^n\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{n^2}\right)} \int_{\frac{\pi}{4}-\frac{1}{n^2}}^{\frac{\pi}{4}} dx & \text{car } \cos(x) \text{ est décroissante sur I} \\ &= \frac{1}{n^2} \frac{1}{\cos^n\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{n^2}\right)} \end{aligned}$$

On a : $\displaystyle\lim_{n \longrightarrow +\infty} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, d'où $\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{n^2}\right) \leq \dfrac{\sqrt{2}}{3}$ à partir d'un certain rang, d'où $0 \leq n^2 \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{n^2}\right) \leq \left(\dfrac{\sqrt{2}}{3}\right)^n \longrightarrow 0$, car n^2 est une puissance et $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{3}\right)^n$ est une exponentielle qui tend vers 0, car $-1 < \dfrac{\sqrt{2}}{3} < 1$. D'où $\displaystyle\lim_{n \longrightarrow +\infty} I_n = +\infty$.

6)
$$\begin{aligned} I_{n+2} &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^{n+2}(x)} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2(x)} \frac{1}{\cos^n(x)} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan'(x) \frac{1}{\cos^n(x)} dx \\ &= \left[\tan(x) \frac{1}{\cos^n(x)}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(x) \left(\frac{1}{\cos^n(x)}\right)' dx \\ &= (\sqrt{2})^n + n \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2(x)}{\cos^{n+2}(x)} dx \\ &= (\sqrt{2})^n + n \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-\cos^2(x)}{\cos^{n+2}(x)} dx \\ I_{n+2} &= (\sqrt{2})^n + n(I_n - I_{n+2}) \end{aligned}$$

D'où $(n+1)I_{n+2} = (\sqrt{2})^n + nI_n$, et par suite $I_{n+2} = \dfrac{(\sqrt{2})^n}{n+1} + \dfrac{n}{n+1} I_n$.