MPSI 1 **2002-2003**

CPGE Agadir

Devoir surveillé N°10

Lundi le:16 Juin 2003

Programme:Toute l'année

Probléme I : Algébre

Partie I :Préambule

Dans tout le problème, on appelle triangle rectangle pseudo-isocèle (en abrégé TRPI) tout triangle rectangle dont les côtés ont pour longueurs des entiers de la forme a, $a+1$, c (c est la longueur de l'hypoténuse).On admet qu'il existe une infinité de TRPI (ce résultat sera démontré au II.C) et on classe les TRPI dans l'ordre croissant des valeurs de a.Ainsi, le triangle de côtés $a = 3$, $a+1 = 4$, $c = 5$ est le plus petit TRPI.

1. (0.25) Si a et c sont des entiers naturels non nuls, montrer qu'ils définissent un TRPI si et seulement s'ils vérifient la relation:$(R1)\ \ 2a^2 - c^2 + 2a + 1 = 0$.

   le but du problème est la détermination des TRPI. On note a_n et c_n les longueurs du plus petit côté et de l'hypoténuse du n^{eme} TRPI et on définit ainsi deux suites $(a_n)_{n\in IN}$ et $(c_n)_{n\in IN}$ avec $a_1 = 3$ et $c_1 = 5$. Comme $a = 0$ et $c = 1$ vérifient la relation (R1), on pose $a_0 = 0$ et $c_0 = 1$. Les termes a_n et c_n sont alors définis pour tout $n \in IN$.
2. (0.25) Ecrire un programme permettant de déterminer les valeurs successives de a_n et c_n (le candidat peut utiliser, en l'indiquant, le langage informatique de son choix, ou écrire le programme en francais
3. (0.25) Déterminer les valeurs de a_n et c_n pour $n = 2$ et pour $n = 3$.

Partie II:Les suites

1. (0.25) Montrer que pour $n = 1,2,3$ les termes c_n vérifient une relation de la forme $c_{n+1} + \beta c_n + \lambda c_{n-1} = 0$.
2. (0.25) Déterminer β et λ. On considère la suite $(v_n)_{n\in IN}$ définie par $v_0 = c_0$, $v_1 = c_1$ et pour $n \geq 1$, $v_{n+1} + \beta v_n + \lambda v_{n-1} = 0$ (β et λ sont les valeurs calculées ci-dessus). Montrer que, pour tout n, $v_n \in IN$. Déterminer v_n en fonction de n.
3. (0.5) Montrer que pour $n = 1,2,3$, les termes a_n vérifient une relation de la forme : $a_{n+1} + \beta a_n + \lambda a_{n-1} = b, \beta$ et λ sont les coefficients calculés en II.1 et b est a déterminer. On considère la suite $(u_n)_{n\in IN}$ définie par $u_0 = a_0$, $u_1 = a_1$ et pour $n \geq 1$, $u_{n+1} + \beta u_n + \lambda u_{n-1} = b$. Montrer que, pour tout n, $u_n \in IN$. On pose, pour tout $n \in IN$, $w_n = u_n + \frac{1}{2}$. Déterminer w_n, puis u_n en fonction de n.

   Dans toute la suite du problème, les suites $(u_n)_{n\in IN}$ et $(v_n)_{n\in IN}$ sont celles définies dans les questions II.2 et II.1.
4. (0.25) Montrer que, pour tout $n \geq 1$, u_n et v_n sont les longueurs du petit côté et de l'hypoténuse d'un TRPI.

Partie III:L'algébre lineaire

1. (0.25) Montrer que les suites $(u_n)_{n\in IN}$ et $(v_n)_{n\in IN}$ vérifient le système : $(S)\begin{cases} u_{n+1} &= 3u_n + 2v_n + 1 \\ v_{n+1} &= 4u_n + 3v_n + 2 \end{cases}$
2. (0.25) En notant, pour $n \in IN$, $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$,écrire le système (S) sous la forme matricielle

   :$X_{n+1} = AX_n + B$ où $A \in M_2(IR)$, $B \in M_{2,1}(IR)$, en précisant A et B.
   - **a**. (0.25) Montrer que $A - I$ est inversible, I désigne la matrice unité de $M_2(IR)$. Calculer $(A-I)^{-1}$.
   - **b**. (0.25) Pour $n \in IN$ fixé, on pose $S_n = I + A + \ldots + A^{n-1}$. Calculer $(A-I)S_n$. En déduire S_n en fonction de $(A-I)$,I et A^n.
   - **c**. (0.25) Exprimer X_n en fonction de A^n,S_n,B et X_0
3. ..
   - **a**. (0.5) Ecrire A sous la forme $P\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}P^{-1}$ En déduire A^n : on pourra poser $p = (3+2\sqrt{2})$ et $q = (3-2\sqrt{2})$.
   - **b**. (0.25) Calculer X_n en fonction de n. Retrouver les expresssions de u_n et v_n déterminées en II.

Partie IV:**Un peu de géometrie**

L'objectif de cette partie est de montrer que les couples (u_n, v_n) définissent des TRPI et que ce sont les seuls couples d'entiers ayant cette propriété. On munit le plan euclidien d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. (0.5) Montrer que la recherche des TRPI équivaut recherche des points coordonnées dans IN sur la conique C d'équation : $y^2 = 2x^2 + 2x + 1$.
2. (0.5) Préciser la nature de cette conique. En tracer un graphe soigné dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
3. (0.25) On considère l'application φ du plan dans lui-m me, qui au point $M(x,y)$ associe le point $M'(x',y')$ défini par : $x' = 3x + 2y + 1$ et $y' = 4x + 3y + 2$. Montrer que φ est bijective et déterminer φ^{-1}.
4. (0.25) Montrer que $\varphi(C) = C$.
5. (0.25) On notera C_1 la partie de C constituée des points de C d'ordonnée positive. Montrer que $\varphi(C_1) = C_1$.
6. (0.5) Pour $n \in IN$, on désigne par M_n le point de coordonnées (u_n, v_n) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. $\overrightarrow{OM_n} = u_n \vec{i} + v_n \vec{j}$.Montrer que, pour tout n de IN, $M_n \in C_1$.
7. (0.5) On note $[M_n, M_{n+1}]$ l'ensemble des points de C_1 dont l'abscisse x appartient au segment $[u_n, u_{n+1}]$.Montrer que, pour tout n de IN, $\varphi([M_n, M_{n+1}]) \subset [M_{n+1}, M_{n+2}]$.
8. (0.5) Déterminer l'ensemble des points M de C_1 tels que $\varphi(M)$ a une abscisse positive. En déduire que pour tout n de IN, $\varphi([M_n, M_{n+1}]) = [M_{n+1}, M_{n+2}]$.
9. (0.25) En considérant deux entiers a et c définissant un TRPI, conclure.

Partie V:**Et l'outil arithmétique**

1. (0.25) Montrer que les deux entiers naturels a et c définissent un TRPI si et seulement si : $(2a+1)^2 - 2c^2 = -1$.
2. (0.25) En déduire que $(2a_n + 1)$ et c_n sont, pour $n \geq 1$, respectivement les coefficients de 1 et de $\sqrt{2}$ dans le développement de $(1+\sqrt{2})^{2n+1}$.Ce procédé est exactement celui utilisé par Bhask pour traiter l'équation plus générale : $4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$.

Probléme II :**Géométrie**

On considére le plan affine euclidien ξ. rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$.Le nombre réel a strictement positif est donné.Soit h une application de classe C^1 sur IR telle que $h(0) = 0$. On lui associe l'application de ξ dans $\vec{\xi}$ définie par : $\vec{f}(u,v) = \begin{pmatrix} a(1-\cos(u))\sin(u-v) + h(v) \\ -a(1-\cos(u))\sin(u-v) \end{pmatrix}, \forall t \in IR;$ on pose $\overrightarrow{O\Omega_t} = h(t)\vec{i}$ et (γ_t) désigne l'arc plan paramétré défini par

$$:(\gamma_t) = \left\{ M(u)\begin{pmatrix} x(u) \\ y(u) \end{pmatrix} \in \xi \text{ tel que : } \overrightarrow{OM} = \vec{f}(u,t), u \in IR \right\}.\text{Enfin}$$

$$(\Gamma) = \left\{ P(v)\begin{pmatrix} x(v) \\ y(v) \end{pmatrix} \in \xi \text{ tel que : } \overrightarrow{OP} = \vec{f}(v,v), v \in IR \right\}$$

1. (0.25) Donner une équation polaire de (γ_0).dans le repére $(O; -\vec{j}, \vec{i})$ Dessiner le support de (Γ),
2. (0.25) Plus généralement donner pour t réel une équation polaire de (γ_0), dans le repère $(\Omega_t; -\vec{j}, \vec{i})$
3. (0.25) Déterminer une isométrie transformant le support de (γ_0), en celui de (γ_t),
4. (0.5) Déterminer l'application h de sorte que pour tout réel α, on ait la relation : $\frac{d\overrightarrow{OP}}{dv}(\alpha) = \frac{\partial \vec{f}}{\partial u}(\alpha, \alpha)$.Interpréter géométriquement cette égalité.
5. (0.5) Montrer que, dans ces conditions, si le point $M(\alpha) \in (\gamma_0)$, est un point régulier, il en est de même pour le point $P(\alpha) \in (\Gamma)$. Comment déduire la tangente à (Γ) en $P(\alpha)$ de la tangente en $M(\alpha) \in (\gamma_0)$?

   Dans toute la suite du probléme , $(\Gamma) = \left\{ P(v)\begin{pmatrix} x(v) = a(v - \sin(v)) \\ y(v) = -a(1-\cos(v)) \end{pmatrix}, v \in IR \right\}$
6. (0.5) Soient respectivement s_0 et s des abscisses curvilignes sur (γ_0) et (Γ). Comparer $\frac{ds}{dv}$ et $\frac{ds_0}{dv}$
7. (0.25) Comparer et calculer la longueur des sous-arcs respectifs de (γ_0) et (Γ) définis par un intervalle

$[0,2\pi]$.

8. (0.5) Pour $v \in]0,2\pi[$.déterrmner le repére de Frenet $(P(v);\vec{\tau},\vec{n})$ au point $P(v) \in (\Gamma)$.
9. (0.5) Calculer le rayon de courbure R en ce point.
10. (0.25) Soit $C(v)$ le centre de courbure associé au point $P(v) \in (\Gamma)$. Calculer les coordonnées de $C(v)$ dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$
11. (0.25) Soit (Γ_1) le lieu géométriques des points $C(v)$. Par quelle transformation affine le support de (Γ_1) se déduit-il de celui de (Γ) ?
12. (0.5) Expliciter des transformations géométriques simples laissant globalement invariant le support de (Γ)

Probléme II :**Analyse**

Les parties II et III sont indépendantes et utilisent les résultats établis à la partie I.

Notations: une fonction de classe C^1 sur l'intervalle *I* de *IR* est une fonction dérivable sur *I*, dont la dérivée f' est continue sur *I*.

PARTIE I

1. On définit la fonction φ sur $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ par: $\varphi(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{\sin t}$ si $t \neq 0$ et $\varphi(0) = 0$.
   - a. ..
     - i. (0.5) Donner le développement limité de φ au voisinage de 0 à l'ordre 4.
     - ii. (0.25) En déduire que φ est continue et dérivable en 0. Préciser $\varphi'(0)$.
   - b. (0.25) Montrer que φ est de classe C^1 sur $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$
   - c. (0.25) Soit la fonction ψ définie sur $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ par: $\psi(t) = \frac{t}{\sin t}$ si $t \neq 0$ et $\psi(0) = 1$. Montrer que ψ est une fonction de classe C^1 sur $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$. Préciser $\psi'(0)$.
2. (0.25) Soient a et b réels tels que $a < b$. Soit g une fonction de classe C^1 sur $[a,b]$ à valeurs réelles. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que: $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} \int_a^b g(t)\sin(\lambda t)\,dt \quad (1)$
3. Soit $n \in IN^*$. On définit S_n sur $[0,\pi]$ par: $S_n(t) = 1 + 2\sum\limits_{k=1}^{n}\cos(2kt)$.
   - a. ..
     - i. (0.5) Montrer, *sans récurrence*, que: $\forall t \in]0,\pi[, \quad S_n(t) = \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t} \quad (2)$
     - ii. (0.25)Calculer $S_n(0)$ et $S_n(\pi)$.
   - b. (0.5) Calculer la valeur de l'intégrale $J_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\,dt$.

PARTIE II

1. ..
   - a. (0.5) Déterminer la limite de $\int_0^{\pi/2} \varphi(t)\sin(2n+1)t\,dt$ lorsque n tend vers $+\infty$.
   - b. (0.25)En déduire la limite de $I_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n+1)t}{t}\,dt$ lorsque n tend vers $+\infty$.
2. ..
   - a. ..
     - i. (0.25) Vérifier que la fonction f définie par $f(t) = \frac{\sin t}{t}$ se prolonge en une fonction continue sur *IR*.
     - ii. (0.5) On note F la fonction définie sur IR_+ par: $F(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt$. Comparer $F\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right)$ et I_n.
   - b. ..
     - i. (0.25) Soit x réel, $x \geq \frac{\pi}{2}$. Justifier l'existence de $n \in IN$ (dépendant de x) tel que: $(2n+1)\frac{\pi}{2} \leq x < (2n+3)\frac{\pi}{2}$. On note $\alpha(x) = (2n+1)\frac{\pi}{2}$.

ii. (0.5) Montrer que $\int_{\alpha(x)}^{x} \frac{\sin t}{t}\,dt$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$.

c. (0.25) En déduire que $F(x)$ admet une limite ℓ si x tend vers $+\infty$. Préciser ℓ.

3. ..

a. (0.5) Soient x et y réels, tels que $y > x > 0$. Montrer que: $\left|\int_{x}^{y} \frac{\sin t}{t}\,dt\right| \leq \frac{2}{x}$. (On effectuera une intégration par parties).

b. (0.25) En déduire que: $\forall x > 0, |\ell - F(x)| \leq \frac{2}{x}$.

PARTIE III

1. ..

a. (0.5) Déterminer deux réels α et β, indépendants de n, tels que: $\forall n \in IN^*, \int_0^{\pi}(\alpha t + \beta t^2)\cos(nt)\,dt = \frac{1}{n^2}$. ($\alpha$ et β sont désormais ainsi fixés).

b. (0.25) En déduire que $2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} - \int_0^{\pi}(\alpha t + \beta t^2)S_n(\frac{t}{2})\,dt$ est un réel indépendant de n, que l'on précisera.

c. (0.25) On définit la fonction h sur $]0,\pi]$ par: $h(t) = \frac{(\alpha t+\beta t^2)}{\sin(\frac{t}{2})}$. Montrer que h se prolonge en une fonction de classe C^1 sur $[0,\pi]$.

2. On définit les suites $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$, $(n \geq 1)$ et $v_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k+1)^2}$ $(n \geq 0)$.

a. (0.5) Déduire des questions précédentes que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ converge et donner sa limite.

b. (0.5) Montrer que la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ converge et déterminer sa limite.

Exercices :

1. (1.5pt) Reconaitre la conique d'équation:$5x^2 + 2\sqrt{3}\,xy + 7y^2 - \left(10 + 2\sqrt{3}\right)x - \left(14 + 2\sqrt{3}\right)y - 4 + 2\sqrt{3} = 0$

2. (1pt) Reconnaitre la nature de la conique d'équation:$\begin{cases} x - y + 2z = -1 \\ y^2 = x^2 + x + 1 \end{cases}$

3. Dessiner les courbes d'équations polaires:

a. (1.5 pt) $\rho(\theta) = 1 - \tan(2\theta)$

b. (1.5pt) $\rho(\theta) = \frac{\cos(2\theta)}{1-2\cos(\theta)}$

4. (1pt) Soit deux cercles de centres $\Omega(a,0)$ et $\Omega'(-a,0)$ et de rayons R et R' respectivement.Montrer que les droites D coupant ces deux cercles suivant des cordes de meme longueur sont tangente à une parabole fixe dont on donnera l'équation

5. Soit (γ) arc géométrique plan définie par l'équation polaire : $r(\theta) = sin(\frac{\theta}{n})^n$où $n \in IN^*, 0 < \theta < n\pi$

a. (0.5) calculer $\|\frac{d\overrightarrow{OM}}{d\theta}\|$.

b. (0.25) En déduire que si β est l'angle entre la droite (OM) et la tangente a (γ) au point M alors : $\beta = \frac{\theta}{n}$.

c. (0.5) En déduire l'angle α entre l'axe (Ox) et la tangente a (γ) au point M, puis R le rayon de courbure.

d. (0.5) Soit M' la projection orthogonale de C ,centre de courbure de (γ) au point M, sur la droite (OM), montrer que M' est l'image de M par l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{1}{n+1}$

6. On considère les deux ellipses : (ξ) : $\frac{x^2}{4a^2} + \frac{y^2}{4b^2} = 1$ et (ξ') : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

a. (0.5) A quelle condition une droite d ' équation : $ux + vy + w = 0$ est tangente a (ξ')

b. (0.75) Pour tout point M de (ξ) on mène les deux tangentes a (ξ') qui recoupent (ξ) en P et Q montrer que la droite (PQ) est tangente a (ξ')(utiliser les coordonnées polaires)

7. (1pt) Soit (P) la parabole d'équation : $x^2 = 2py$,Trois tangentes a (P) formant un triangle , montrer que son orthocentre appartient a la directrice