Contrôle 5 : *Géomètrie affine et euclidienne Courbes planes et coniques.*

MPSI-Maths.
Mr Mamouni : *myismail1@menara.ma*

Source disponible sur :
©http://www.chez.com/myismail

Vendredi 21 Juin 2007.

Durée 2 heures.

Conseils pour la rédaction et la présentation des copies.

- **Chaque variable utilisée dans une démonstration doit être définie.**
- **L'énoncé ne doit pas être recopié sur les copies.**
- **Chaque résutat annoncé doit être justifié en citant précisément le théorème du cours avec ses hypothèses exactes utilisé ou en citant le numéro de la question précèdente utilisée.**
- **Les résultats importants doivent être simplifiés et encadrés.**
- **Les calculs doivent être détaillés et expliqués à l'aide de phrases simples.**
- **Laisser une marge à gauche de chaque feuille, en tirant un trait vertical, et un horizontal de la 1ère double feuille pour la note et les remarques du correcteur.**
- **Numéroter les double feuille de la façon suivante : 1/n,2/n,...,n/n où n est le nombre total de double feuille.**
- **Les questions doivent être traités dans l'ordre de l'énoncé.**
- **Tirer deux traits diagonaux pour rayer une partie du raisonnement que vous considérez fausse.**

Barème sur 30 points, dont 2 points pour la présentation et 3 pour la rédaction

Exercice 1. Reconnaitre la transformation affine de $\mathbb{R}^3$, définie dans le répère canonique par l'équation cartesienne suivante :

1) $$\begin{cases} x' = \frac{1}{9}(-7x-4y-4z) & -6 \\ y' = \frac{1}{9}(4x-8y+z) & +7 \\ z' = \frac{1}{9}(-4x-y+8z) & -10 \end{cases}$$ **(2 points)**

2) $$\begin{cases} x' = 3x+4y-2z-4 \\ y' = -2x-3y-2z+4 \\ z' = -4x+8y+5z-8 \end{cases}$$ **(2 points)**

Exercice 2. **Soit $\mathcal{C}$ la conique dont l'équation cartésienne dans le repère canonique est :**

$$9x^2 - 24xy + 16y^2 + 10x - 55y + 50 = 0$$

1) **Préciser la nature de $\mathcal{C}$.** **(1 point)**
2) **Donner son équation réduite.** **(2 points)**
3) **Préciser son foyer, son exentricité et sa directrice.** **(2 points)**

Exercice 3. **Déterminer le réel a pour que les deux droites d'équations :**

$$D_1 : \begin{cases} x - 2z = 1 \\ y - z = 2 \end{cases} \quad , \quad D_2 : \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - 2y - 2z = a \end{cases}$$

Soient coplanaires, puis donner l'équation de leur plan. **(3 points)**

Exercice 4. **Déterminer l'équation de la perpendiculaire commune des deux droites d'équations :**

$$D_1 : \begin{cases} 2x + y + z = 2 \\ x + y + z = 1 \end{cases} \quad , \quad D_2 : \begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x - y + z = 4 \end{cases}$$

En déduire $d(D_1, D_2)$. **(3 points)**

Exercice 5. **Dessiner la courbe plane d'équation :**

1) $\begin{cases} x(t) = \dfrac{t^3}{t^2 + t - 2} \\ y(t) = \dfrac{t^2 - 2t}{t - 1} \end{cases}$ **(2 points)**

2) $\rho(\theta) = \dfrac{\cos 2\theta}{1 - 2\cos\theta}$. **(3 points)**

Exercice 6. *1 point par question.* **Soit A, B, C, D, E des points donnés de l'espace, et λ réel fixe et**

$$\mathcal{E} = \{M \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } \|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \lambda\overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME}\|\}$$

1) **On suppose dans cette question que $\lambda = -3$.**
   a) **Montrer que le vecteur $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \lambda\overrightarrow{MC}$ ne dépond pas du point M.**
   b) **En déduire que $\mathcal{E}$ est une sphère, dont on présicera le centre et le rayon.**
2) **On suppose dans cette question que $\lambda \neq -3$, et on pose $G = \mathit{barycentre}\,((A,1),(B,2),(C,\lambda))$ et I milieu de A et B.**
   a) **Montrer que $(3+\lambda)^2 MG^2 = 4MI^2$.**
   b) **Que peut-on dire de $\mathcal{E}$ si $\lambda \in \{-1, -5\}$.**
   c) **Si $\lambda \notin \{-1, -5\}$, montrer que $\mathcal{E}$ est une sphère, dont on présicera le centre et le rayon.**
   Indication : utiliser $G_1 = \mathit{barycentre}\,((G,(3+\lambda)^2),(I,-4))$.

Bonne Fin d'année.