CPGE My Youssef, Rabat

بِسمِ اللَّهِ الرَّحمَنِ الرَّحِيمِ
وَ قُلِ إِعمَلُوا فَسَيَرَى اللَّهُ عَمَلَكُم وَ رَسُولُهُ وَ
المُؤ مِنُون

صَدَقَ اللَّهُ العَظِيم

Contrôle Blanc: *Géometrie euclidienne du plan et de l'espace*

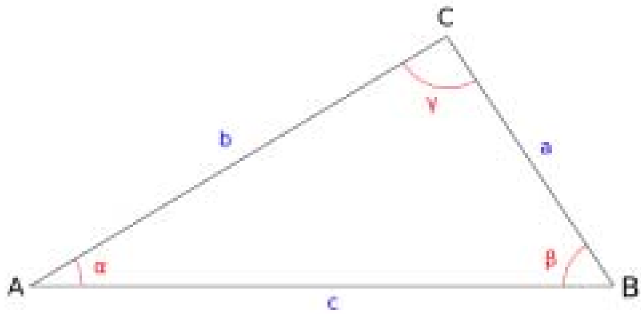
Jeudi le 15 Janvier 2009

Durée 1 heure

Blague du jour :
Ce service est provisoirement suspendu.

mathématicien du jour ***Heron***
Héron d'Alexandrie ou Héron L'Ancien est un ingénieur, un mécanicien et un mathématicien grec du Ier siècle après J.-C.
Héron d'Alexandrie (100 ap. J.-C.) créateur d'automates mus par l'eau, s'intéresse à la vapeur et à l'air comprimé. Principalement connu pour les machineries décrites dans son Traité des pneumatiques (Pneumatica), on lui doit par ailleurs un projet de machine destinée à ouvrir automatiquement les portes d'un temple.
On attribue à Héron d'Alexandrie plusieurs formules mathématiques dont une de calcul de l'aire d'un triangle à partir de la longueur de ses côtés (la formule de Héron), ainsi qu'une autre permettant d'approcher la racine carrée de n'importe quel nombre de manière récursive. Cependant, la première formule est déjà prouvée par Archimède, et la seconde est déjà connue des Babyloniens.
Il fut aussi l'auteur de formules de mesures de longueur, de surface et de volume pour des objets en trois dimensions. Les recherches mathématiques de Héron d'Alexandrie visaient principalement l'aspect pratique de la mesure des objets

Mini Problème.
Soit (ABC) un triangle du plan euclidien orienté. On note α la mesure de l'angle non orienté des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ et a la longueur BC ; ainsi que β et C et b et c les quantités analogues pour les autres sommets, comme le montre le dessin ci-contre



1) ***(2pts)*** **Montrer que** $\mathrm{Det}(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=\mathrm{Det}(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA})=\mathrm{Det}(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})$**.**
On dit que ABC est orienté positivement si ces produits mixtes sont positifs et négativement sinon.

2) ***(1pt)*** **Montrer que la mesure principale de l'angle** $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})$ **est égale à** α **lorsque** (ABC) **est orienté positivement, et** $-\alpha$ **sinon.**
(2pts) **Montrer que dans tous les cas**

$$\alpha+\beta+\gamma=\pi$$

3) **On note** $p; R$ **et** S **respectivement le demi-périmètre** $\frac{1}{2}(a+b+c)$ **; le rayon du cercle circonscrit et l'aire de** (ABC)**.**

- **a)** **Montrer que** $\dfrac{a}{\sin\alpha}=\dfrac{b}{\sin\beta}=\dfrac{c}{\sin\gamma}=2R$ ***(loi des sinus)*****.**
- **b)** **Montrer que** $S=\dfrac{1}{2}bc\sin\alpha=\dfrac{abc}{4R}$**.**
- **c)** $a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha$ ***la formule d'Al Khashi.***
- **d)** **En déduire que** $16S^2=4b^2c^2-(a^2-b^2-c^2)^2$**.**
- **e)** **Simplifier** $(a+b+c)(a+b-c)(-a+b+c)(a-b+c)$
- **f)** **En déduire** $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ ***Formule de Heron***

Fin
Bonne chance