CPGE My Youssef, Rabat

بِسمِ اللَّهِ الرَّحمَنِ الرَّحِيمِ
وَ قُلِ إِعمَلُوا فَسَيَرَى اللَّهُ عَمَلَكُم وَ رَسُولُهُ وَ
المُؤ مِنُون

صَدَقَ اللَّهُ العَظِيم

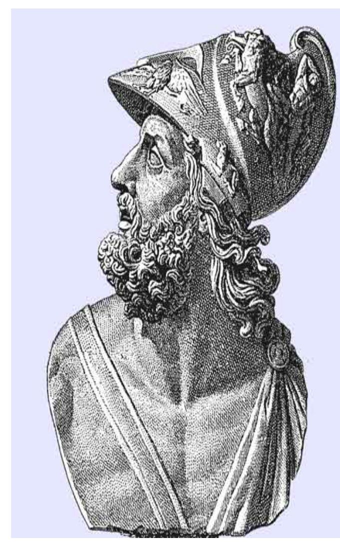
Corrigé du Contrôle: *Géometrie euclidienne du plan et de l'espace*

Jeudi le 15 Janvier 2009

Durée 1 heure

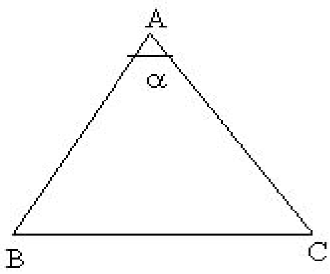
Blague du jour :
Ce service est provisoirement suspendu.

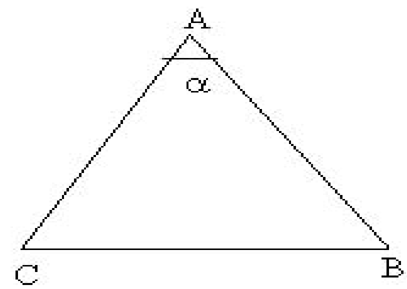
mathématicien du jour ***Menelaus***
Ménélaos ou Ménélaüs d'Alexandrie (fin du 1er siècle) est un mathématicien et astronome grec. Il introduisit la notion de géodésique sur la sphère.
On sait par un dialogue de Plutarque, que Menelaüs passa une partie de sa vie à Rome, mais Pappus d'Alexandrie et Proclus laissent entendre qu'il avait étudié dans sa jeunesse à Alexandrie.
Ptolémée, au second siècle de notre ère, dit également dans son Almageste (chap. VII.3), que Ménélaüs observa deux occultations des étoiles Virginis (Spica) et Scorpii par la Lune à Rome en janvier 98, à seulement quelques jours d'intervalle. Pour Ptolémée, elles confirmaient la précession des équinoxes, un phénomène découvert par Hipparque au deuxième siècle av. J. C.
Les Sphériques est le seul traité de Ménélaüs qui soit parvenu jusqu'à nous, et cela par une traduction arabe. Ces trois livres traitent de la géométrie de la sphère et de ses applications à l'astronomie. C'est ce traité qui définit le triangle sphérique comme formé par trois arcs de grands cercles, les trilatéraux, et qui contient le théorème, dit théorème de Ménélaüs, étendu aux triangles sphériques.



Mini Corrigé.

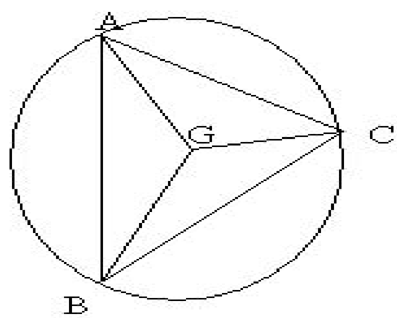
1) $\mathrm{Det}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \mathrm{Det}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{AC}) = \mathrm{Det}(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{AC}) = \mathrm{Det}(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$.
De même on montre que $\mathrm{Det}(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) = \mathrm{Det}(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$.
2) **Facile, il suffit de faire un dessin**





(ABC) **triangle direct** (ABC) **triangle indirect**

Utiliser le théorème de l'angle au centre pour le cercle circonscrit de centre G**, voir figure ci-dessous,**

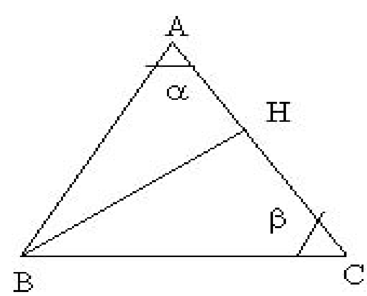


donc

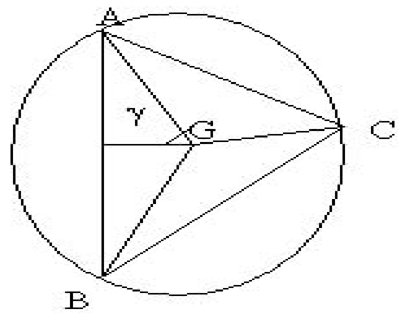
$$\widehat{(\overrightarrow{GB},\overrightarrow{GC})} = 2\widehat{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})} = 2\alpha$$
$$\widehat{(\overrightarrow{GC},\overrightarrow{GA})} = 2\widehat{(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA})} = 2\beta$$
$$\widehat{(\overrightarrow{GA},\overrightarrow{GB})} = 2\widehat{(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})} = 2\gamma$$

Or $\widehat{(\overrightarrow{GB},\overrightarrow{GC})} + \widehat{(\overrightarrow{GC},\overrightarrow{GA})} + \widehat{(\overrightarrow{GA},\overrightarrow{GB})} = 2\pi$**, d'où le résultat.**

3) a) Soit H **le pied de la hauteur issue du sommet** B **(voir figure ci-dessous),**



donc $\sin\alpha = \dfrac{BH}{AB}$ **et** $\sin\beta = \dfrac{BH}{CB}$**, d'où** $\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \dfrac{CB}{AB} = \dfrac{a}{c}$**, d'où la première relation et de même pour les autres, mais pour l'autre relation on a le triangle** GAB **est isocèle, donc ses hauteurs et mediatrices sont confondues, et d'après le théorème de l'angle au centre, on a** $\sin\gamma = \dfrac{\frac{AB}{2}}{R} = \dfrac{c}{2R}$**, donc** $\dfrac{\sin\gamma}{c} = 2R$**.**



b) **Montrer que,** $S = \dfrac{1}{2}bc\sin\alpha$ **provient de la formule** $S = \dfrac{1}{2}\mathrm{Det}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ **et enfin d'après la question précédente on a** $\sin\alpha = \dfrac{a}{2R}$**.**

c) $a^2 = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB})(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}) = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CB}-2\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = b^2+c^2-2bc\cos\alpha$ **.**

d) **D'aprés la formule d'Al kashi, on a** $(a^2-b^2-c^2)^2 = 4b^2c^2\cos^2\alpha$**, donc** $4b^2c^2-(a^2-b^2-c^2)^2 = 4b^2c^2\sin^2\alpha = 16S^2$**, d'après 3.b).**

e) **On devellope et on trouve** $(a+b+c)(a+b-c)(-a+b+c)(a-b+c) = -a^4-b^4-c^4+2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2 = -(a^2-b^2-c^2)^2+4b^2c^2 = 16S^2$

f) **Les calculs donnent** $p(p-a)(p-b)(p-c) = \dfrac{1}{16}(a+b+c)(a+b-c)(-a+b+c)(a-b+c) = S^2$**.**

Fin
à la prochaine