8 janvier 2009

Lemniscate de Bernoulli

On suppose le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{i},\vec{j})$.

Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on note $\vec{u}_\theta = \cos\theta.\vec{i} + \sin\theta.\vec{j}$ et $\vec{v}_\theta = -\sin\theta.\vec{i} + \cos\theta.\vec{j}$.

On étudie la courbe Γ formé des points M du plan tels que $MF.MF' = 1$ avec $F\begin{vmatrix}1\\0\end{vmatrix}$ et $F'\begin{vmatrix}-1\\0\end{vmatrix}$.

La courbe Γ est appelée lemniscate de Bernoulli de foyers F et F'.

1.a Justifier que Γ est symétrique par rapport aux axes (Ox) et (Oy).

1.b Déterminer l'intersection de Γ avec les axes (Ox) et (Oy).

1.c Déterminer un réel R tel que la courbe Γ soit incluse dans le disque de centre O et de rayon R.

2. Afin de représenter Γ, nous allons en déterminer une équation polaire.
Soit M un point du plan dont (ρ,θ) est un système de coordonnées polaires.

2.a Exprimer MF^2 et de même MF'^2 en fonction de ρ et θ.

2.b Justifier que $M \in \Gamma$ ssi $\rho^4 = 2\rho^2\cos 2\theta$.

2.c En déduire que $\rho = \sqrt{2\cos 2\theta}$ est une équation polaire de Γ.

3. On note $M(\theta)$ le point courant de l'arc Γ d'équation polaire $\rho = \sqrt{2\cos 2\theta}$ i.e. le point déterminé par la relation vectorielle $\overrightarrow{OM(\theta)} = \rho(\theta)\vec{u}_\theta$.

3.a Préciser le domaine de définition de l'application $\theta \mapsto M(\theta)$.
Comparer $M(\theta)$ et $M(\theta+\pi)$ d'une part, $M(\theta)$ et $M(-\theta)$ d'autre part.

3.b Dresser le tableau de variation de l'application $\theta \mapsto \rho(\theta) = \sqrt{2\cos 2\theta}$ sur $[0,\pi/4]$.

3.c Préciser l'allure de Γ au voisinage des points de paramètres $\theta = 0$ et $\theta = \pi/4$ en y figurant le sens de parcours des θ croissants.

3.d Pour quels $\theta \in [0,\pi/4]$, la courbe Γ admet-elle en $M(\theta)$ une tangente horizontale ?

3.e Représenter Γ en prenant une unité égale à 4cm.

4. On note $\mathcal{C},\mathcal{C}'$ les cercles de centres F,F' et de rayon $\sqrt{2}$.

4.a Soit $A(\theta)$ et $B(\theta)$ les points déterminés par $\overrightarrow{M(\theta)A(\theta)} = \vec{u}_{2\theta}$ et $\overrightarrow{M(\theta)B(\theta)} = -\vec{u}_{2\theta}$ de sorte qu'on ait, entre autres, $A(\theta)B(\theta) = 2$ et $M(\theta) = m[A(\theta),B(\theta)]$. Montrer que $A(\theta) \in \mathcal{C}$.
On justifie, par des calculs semblables mais non demandés, que $B(\theta) \in \mathcal{C}'$.

4.b Préciser la portion de $\mathcal{C}$ décrite par le point $A(\theta)$ pour $\theta \in]0,\pi/4[$.

4.c Déduire de ce qui précède comment construire les points de paramètres $M(\theta)$ (avec $\theta \in]0,\pi/4[$).