Devoir Libre : *Géomètrie euclidienne*

MPSI-Maths.
Mr Mamouni : *myismail1@menara.ma*

Soit ξ espace affine euclidien de dimension $p=2$ ou $p=3$, soit $n\in\mathbb{N},(A_i)_{1\leq i\leq n}$ famille de points de ξ deux à deux distincts et $(a_i)_{1\leq i\leq n}$ des nombres réels. Pour tout point $M\in\xi$ on pose :

$\varphi(M)=\sum_{i=1}^{n}a_iMA_i^2$ (fonction scalaire de *Leibniz*).

$\vec{f}(M)=\sum_{i=1}^{n}a_i\overrightarrow{MA_i}$ (fonction vectorielle de *Leibniz*)

1) Reconnaitre l'application affine, g définie par :

$$\begin{array}{rccl} g: & \xi & \longrightarrow & \xi \\ & M & \longmapsto & M' \text{ tel que } \overrightarrow{OM'}=\vec{f}(M) \end{array}$$

Distinguer les cas : $\sum_{i=1}^{n}a_i=0$ et $\sum_{i=1}^{n}a_i\neq 0$)

2) On suppose que $\sum_{i=1}^{n}a_i\neq 0$, et on pose $G=Barycentre(A_i(a_i)_{1\leq i\leq n})$.

Montrer que : $\varphi(M)=\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)MG^2+\varphi(G)$

3) On suppose que $\sum_{i=1}^{n}a_i\neq 0$ montrer que :

$\varphi(M)=\varphi(O)+<2\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{u}>$ où $\overrightarrow{u}$ est un vecteur fixe à déterminer.

4) Reconnaitre l'équipotentielle $\{M\in\xi/\varphi(M)=\lambda\}$ où λ réel donné

Distinguer les cas $\sum_{i=1}^{n}a_i=0$ et $\sum_{i=1}^{n}a_i\neq 0$)

5) On suppose dans la suite que $p=2$ et $n=3$ les point sont non alignés et M point du plan.

a) Montrer que M s'écrit de façon unique sous la forme :

$M=Barycentre(A_i(a_i)_{1\leq i\leq 3})$ où a_i réels tels que $\sum_{i=1}^{3}a_i=1$

b) Montrer que :
$\left(\sum_{i=1}^{3}a_i\right)\vec{f}(M)=a_2a_3\left(A_2A_3\right)^2+a_1a_3\left(A_1A_3\right)^2+a_2a_1\left(A_2A_1\right)^2$. (on pourra utiliser (b)).

c) En déduire que M appartient au cercle circonscrit du triangle $(A_1A_2A_3)$ ssi : $a_2a_3\left(A_2A_3\right)^2+a_1a_3\left(A_1A_3\right)^2+a_2a_1\left(A_2A_1\right)^2=0$ *(équation barycentrique du cercle)*

d) Donner l'équation cartésienne du cercle circonscrit du triangle $(A_1A_2A_3)$ si $A_1=(1,1),A_2=(-1,2)$ et $A_3=(1,0)$

Fin.