**Lycée Moulay Youssef Rabat**
**MPSI 2 et 5**

**05 – 01 - 09**

# Devoir surveillé 4
# Durée 4h

## Exercice 1.

On considère la courbe paramétrée $C$ définie sur $D$ par $\varphi(t) = (x(t), y(t))$ avec

$x(t) = \dfrac{t}{t^2 - 1}$ et $y(t) = \dfrac{t^2}{t-1}$ et on note $\Gamma$ son support.

1/ Préciser $D$. Calculer les dérivées de $x$ et $y$ sur $D$ et dresser le tableau des variations de $x$ et $y$.

2/ Etudier les branches infinies aux extrémités de $D$, on montrera en particulier que $\Gamma$ admet une asymptote oblique et on déterminera la position de $\Gamma$ par rapport à celle-ci.

3.a/ Montrer que la courbe $C$ admet un unique point double et déterminer ses coordonnées cartésiennes

3.b/ Montrer que les tangentes en ce point sont orthogonales.

4/ Construire le support $\Gamma$ de $C$.

## Exercice 2.

On considère la courbe $C$ définie par l'équation polaire : $\rho = 1 + \sin\theta$ et on note $\Gamma$ son support

1/ Justifier pourquoi on peut réduire le domaine à $D = \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right]$.

2/ Calculer $\rho(\pi - \theta)$, en déduire que $\Gamma$ est symétrique par rapport à $(oy)$.

3/ Construire le support $\Gamma$, on tracera les tangentes aux points d'intersection avec les axes.

( remarquer que $\theta \in \left[\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right] \Leftrightarrow \pi - \theta \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ )

## Problème.

Soit $n$ un entier naturel non nul, on munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire canonique et on note le produit scalaire de deux vecteurs $x$ et $y$ par $x \bullet y$ et la norme d'un vecteur $x$ par $\|x\| = \sqrt{x \bullet x}$. On note ensuite $U_n$ l'ensemble des vecteurs unitaires de $\mathbb{R}^n$. On étudie dans ce problème les sous – ensembles finis $A$ de $U_2$ ou $U_3$ tels que les produits scalaires de deux vecteurs distincts de $A$ soient tous égaux.

### Partie 1.

Soit $\alpha$ un réel, on note $R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ et $E = \{R_\alpha, \alpha \in \mathbb{R}\}$.

1/ Montrer que : $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}; R_\alpha \times R_\beta \in E$.

2/ Montrer que pour tout réel $\alpha$, $R_\alpha$ est inversible et $R_\alpha^{-1} \in E$.

3/ On note $B=(e_1,e_2)$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^2$, soit $x$ un vecteur de $\mathbb{R}^2$ de coordonnées $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ dans $B$. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on note $r_\alpha(x)$ le vecteur de $\mathbb{R}^2$ de coordonnées $R_\alpha \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ dans $B$.

3.a/ Montrer que $\|r_\alpha(x)\| = \|x\|$.

3.b/ Calculer $x \bullet r_\alpha(x)$ et $\det(r_\alpha(x),x)$ en fonction de $\|x\|, \cos\alpha$ et $\sin\alpha$.

3.c/ Soient $x$ et $y$ deux éléments de $\mathbb{R}^2$ tels que $\|x\| = \|y\|$. Montrer qu'il existe un réel $\alpha$, unique modulo $2\pi$, tel que $r_\alpha(x) = y$.

3.d/ Soient $u, v \in \mathbb{R}^2$ non nuls, on pose $x = \dfrac{u}{\|u\|}$ et $y = \dfrac{v}{\|v\|}$. Justifier qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $r_\alpha(x) = y$ et montrer que $u \bullet v = \|u\|\|v\|\cos\alpha$.

En déduire que : $\forall u, v \in U_2,\ u \bullet v \in [-1,1]$.

**Partie 2.** Dans cette partie, on étudie le cas de $n = 3$.

4/ Soient $a \in [-1,1]$ et $\alpha = \arccos a \in [0,\pi]$.

4.a/ Soient $x, y \in U_2$, montrer que : $\quad x \bullet y = a \Leftrightarrow y = r_\alpha(x)$ ou $y = r_{-\alpha}(x)$.

4.b/ On suppose qu'il existe trois vecteurs $x, y, z$ de $U_2$ distincts deux à deux tels que

$$x \bullet y = y \bullet z = z \bullet x = a$$

Montrer que $\{x,y,z\} = \{x, r_\alpha(x), r_{-\alpha}(x)\}$ et que $r_{3\alpha}(x) = x$. En déduire que $\alpha = \dfrac{2\pi}{3}$ et que si un vecteur unitaire $t$ est tel que $t \bullet x = a$ alors $t = y$ ou $t = z$.

5/ On pend $\alpha = \dfrac{2\pi}{3}$, soit $A$ une partie finie de $U_2$ contenant au moins trois éléments.

Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes.

( i ) $\quad \forall (u,v,u',v') \in A^4$ tel que $u \neq v$ et $u' \neq v'$ on a : $u \bullet v = u' \bullet v'$.

(ii) $\quad \exists e \in A$ tel que $A = \{e, r_\alpha(e), r_{-\alpha}(e)\}$.

**Partie 3.** Dans cette partie, on étudie le cas de $n = 3$.

6/ Soient $u, v \in U_3$.

6.a/ Montrer que si $(u,v)$ est liée alors $v = u$ ou $v = -u$.

6.b/ Montrer que si $(u,v)$ est libre alors il existe $w \in U_3$ tel que $vect(u,v) = vect(u,w)$ et $u \perp w$. En déduire que : $-1 < u \bullet v < 1$. ( utiliser $v \in vect(u,w)$ )

7/ Soient $b \in [-1,1]$ et $k$ un entier supérieur ou égal à 4. On suppose qu'il existe un sous – ensemble $A = \{u_1, u_2, ..., u_k\}$ de vecteurs de $U_3$ tel que $\forall i, j \in \{1,2,...,k\}$, $u_i \bullet u_j = b$ pour $i \neq j$.

7.a/ Montrer que $b \neq 1$ et $b \neq -1$.

7.b/ Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ unique tel que pour tout $i \in \{1,2,...,k-1\}$, $u_k$ est orthogonal à $u_i + \lambda u_k$. Donner la valeur de $\lambda$.

7.c/ Pour tout $i \in \{1,2,...,k-1\}$, on pose $v_i = u_i + \lambda u_k$, où $\lambda$ est la valeur trouvée en 6.b/. Déterminer la valeur des produits scalaires $v_i \bullet v_j$ pour $1 \leq i \leq j \leq k-1$.

7.d/ Soit $F = vect(u_k)$. Montrer que $F^\perp$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, de dimension 2.

7.e/ On note pour $i \in \{1,2,...,k-1\}$, $w_i = \dfrac{v_i}{\|v_i\|}$, justifier que $\|w_i\| = 1$ et que $w_i \in F^\perp$.

7.f/ Calculer, pour $i, j \in \{1,2,...,k-1\}$, $w_i \bullet w_j$. En déduire que $b = -\dfrac{1}{3}$ et que $k = 4$.

8/ Soient $G$ un sous – espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, de dimension 2 et $t$ un vecteur unitaire orthogonal à $G$.

On considère trois vecteurs unitaires $x, y, z$ de $G$ tels que $x \bullet y = y \bullet z = z \bullet x = -\dfrac{1}{2}$.

Pour tout couple $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$, on pose $A_{\alpha,\beta} = \{t, \alpha x + \beta t, \alpha y + \beta t, \alpha z + \beta t\}$. Déterminer les couples $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ tels que $A_{\alpha,\beta}$ soit formé de vecteurs unitaires vérifiant $u \bullet v = -\dfrac{1}{3}$ pour $u$ et $v$ distincts dans $A_{\alpha,\beta}$.