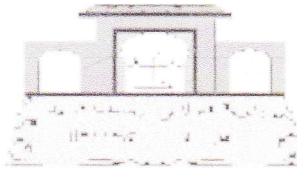


CPGE My Youssef, Rabat



بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ  
وَقُلْ إِعْمَلُوا فَيَسِّرَ اللَّهُ لَكُمْ أَعْمَالَكُمْ وَرَسُولُهُ وَ  
الْمُؤْمِنُونَ  
صَدَقَ اللَّهُ الْعَظِيمُ

Prépas G.S High Tech, Rabat



## DS 5 (08-09): Géométrie euclidienne Nombres réels

Lundi, le 2 Février 2009

Durée : 4heures

*Conseils pour la rédaction et la présentation des copies.*

- Chaque variable utilisée dans une démonstration doit être définie.
- L'énoncé ne doit pas être recopié sur les copies.
- Chaque résultat annoncé doit être justifié en citant précisément le théorème du cours avec ses hypothèses exactes utilisé ou en citant le numéro de la question précédente utilisée.
- Les résultats importants doivent être simplifiés et encadrés.
- Les calculs doivent être détaillés et expliqués à l'aide de phrases simples.
- Laisser une marge à gauche de chaque feuille, en tirant un trait vertical, et un horizontal de la 1ère double feuille pour la note et les remarques du correcteur.
- Numéroté les double feuille de la façon suivante :  $1/n, 2/n, \dots, n/n$  où  $n$  est le nombre total de double feuille.
- Les questions doivent être traités dans l'ordre de l'énoncé.
- Tirer deux traits diagonaux pour rayer une partie du raisonnement que vous considérez fausse.

### PROBLEME 1

#### PARTIE 1

Soient  $A$  et  $B$  deux points du plan orienté et  $\theta$  un réel. On se propose de déterminer l'ensemble  $\Gamma$  des points  $M$  tels que  $M = A$  ou bien  $M = B$  ou bien  $((\widehat{AM}), (\widehat{BM})) \equiv \theta [\pi]$  (il s'agit d'angles de droites). Autrement dit :

$$\Gamma = \{A, B\} \cup \{M \in \mathcal{P}, ((\widehat{AM}), (\widehat{BM})) \equiv \theta [\pi]\}$$

On se place dans le repère  $\mathcal{R}$  suivant : l'origine est le milieu de  $[A, B]$ , l'axe des  $x$  est la droite  $(AB)$ . On notera  $a$  l'abscisse de  $A$  (on choisit  $a$  positif pour les figures).

1. Déterminer  $\Gamma$  lorsque  $\theta = 0$ .
2. Déterminer  $\Gamma$  lorsque  $\theta = \frac{\pi}{2}$ .

3. On suppose désormais que  $\theta \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  et que  $\theta \neq 0$ .

Exprimer  $\tan(\theta)$  à l'aide de  $\text{Det}(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM})$  et de  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM}$ .

En déduire une équation de  $\Gamma$  dans  $\mathcal{R}$ .

4. Montrer que  $\Gamma$  est un cercle. On précisera<sup>1</sup> les coordonnées du centre de ce cercle, ainsi que son rayon en fonction de  $\theta$ .

5. Donner les équations des tangentes en  $A$  et  $B$  à  $\Gamma$ . Préciser les angles qu'elles font avec la droite  $(AB)$ . En déduire un procédé simple de construction du centre de  $\Gamma$ , puis de  $\Gamma$ .

## PARTIE 2

Définition : on dit que 4 points du plan sont *cocycliques* si il existe un cercle auquel ils appartiennent tous les quatre.

1. Soient  $A, B, C$  trois points distincts du plan complexe. Soit  $\theta = ((\widehat{AC}), (\widehat{BC}))$ . En utilisant la partie précédente, décrire l'ensemble suivant de points :

$$\mathcal{H} = \left\{ M \in \mathcal{P} \setminus \{A, B, C\}, \quad ((\widehat{MA}), (\widehat{MB})) = ((\widehat{CA}), (\widehat{CB})) [\pi] \right\}.$$

2. Soient  $A, B, C, D$  quatre points distincts du plan complexe, d'affixes respectives  $a, b, c, d$ .

Montrer que :  $\frac{(d-b)(c-a)}{(d-a)(c-b)} \in \mathbb{R}^* \Leftrightarrow (A, B, C, D \text{ sont cocycliques ou alignés})$ .

## PARTIE 3 : construction de l'inverse

Soit  $z$ , un complexe non réel.

1. Montrer que les points d'affixes  $1, -1, z$  et  $\frac{-1}{\bar{z}}$  appartiennent à un même cercle.

2. Indiquer comment déterminer ce cercle.

3. En déduire une construction géométrique de l'inverse du nombre  $z$ .

<sup>1</sup>On rappelle (sous réserve d'existence) :  $1 + \tan^2(t) = \frac{1}{\cos^2(t)}$  et  $1 + \cotan^2(t) = \frac{1}{\sin^2(t)}$ .

## PARTIE 4 : des résultats intéressants

1. A l'aide d'un raisonnement par récurrence sur  $n$ , montrer : pour tout entier  $n \geq 2$ , si  $z_1, z_2, \dots, z_n$  sont  $n$  nombres complexes non nuls, alors on a l'équivalence

$$(|z_1 + z_2 + \dots + z_n| = |z_1| + |z_2| + \dots + |z_n|) \Leftrightarrow (z_1, z_2, \dots, z_n \text{ ont même argument à } 2\pi \text{ près}).$$

2. Soit un entier  $n \geq 3$  : on considère  $n$  complexes  $z_1, z_2, \dots, z_n$ , tous non nuls et deux à deux distincts. On pose alors, pour tout  $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$ ,  $\alpha_k = \frac{z_k}{|z_k|}$ , et on suppose que  $\sum_{k=1}^n \alpha_k = 0$ .

3. Soit  $z$ , un complexe quelconque, mais distinct de  $z_1, z_2, \dots, z_n$ .

(a) Montrer que  $\sum_{k=1}^n \overline{\alpha_k}(z - z_k)$  est un réel négatif indépendant de  $z$ .

(b) Montrer que  $\sum_{k=1}^n |z_k| \leq \sum_{k=1}^n |z - z_k|$ .

(c) Montrer que l'inégalité précédente est une égalité si, et seulement si :

$$\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, \quad \arg(-\overline{\alpha_k}(z - z_k)) = 0 [2\pi].$$

## PARTIE 5 : point de Torricelli-Fermat

Dans le plan, on considère un triangle  $ABC$  direct dont les angles aux sommets sont tous strictement inférieurs à  $\frac{2\pi}{3}$ . On note  $\mathcal{C}_a$ ,  $\mathcal{C}_b$  et  $\mathcal{C}_c$  les ensembles de points définis respectivement par :

$$(\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{3}[\pi], \quad (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MC}) = \frac{\pi}{3}[\pi], \quad (\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}) = \frac{\pi}{3}[\pi].$$

1. Caractériser géométriquement  $\mathcal{C}_a$ ,  $\mathcal{C}_b$  et  $\mathcal{C}_c$ .
2. Montrer<sup>2</sup> qu'ils ont un point commun, que l'on notera  $I$  (on l'appelle le *point de Torricelli* du triangle  $ABC$ ).
3. Déterminer l'ensemble des points  $M$  du plan qui réalisent le minimum de la somme  $MA + MB + MC$ .

Indication : on pourra commencer par chercher un repère du plan dans lequel les affixes respectives  $a$ ,  $b$  et  $c$  des points  $A$ ,  $B$  et  $C$  vérifient :

$$a \in \mathbb{R}^{+*} \quad \text{et} \quad \frac{a}{|a|} + \frac{b}{|b|} + \frac{c}{|c|} = 0$$

sans oublier que, avant une partie 5, il y a une partie 4...

**Exercice 2** Soit  $a$  et  $b$ , deux réels tels que  $0 < a < b$ .

Pour tout réel  $t \notin \{a, b\}$ , on considère la courbe  $\mathcal{C}_t$  d'équation :

$$\frac{x^2}{a-t} + \frac{y^2}{b-t} = 1.$$

1. Déterminer la nature<sup>1</sup> de la courbe  $\mathcal{C}_t$ .  
Dans les cas où l'on a une conique, on demande d'identifier si c'est une parabole, une hyperbole ou une ellipse et de donner son (ou ses) foyer(s).
2. Montrer que, si  $\mathcal{C}_t$  est une conique, ses foyers ne dépendent pas de  $t$ .
3. Rappeler le principe de dédoublement permettant de trouver une équation de tangente à une conique.
4. Montrer que si  $\mathcal{C}_t$  et  $\mathcal{C}_s$  s'intersectent en  $M$  (avec  $s \neq t$ ), alors ces deux courbes sont orthogonales en  $M$  (c'est à dire les tangentes en  $M$  à  $\mathcal{C}_t$  et  $\mathcal{C}_s$  sont perpendiculaires).<sup>2</sup>
5. Représenter, dans un même repère, les courbes  $\mathcal{C}_0$  et  $\mathcal{C}_5$  (avec  $a = 4$ ,  $b = 9$ ).

On placera avec précision leurs foyers et directrices, leurs points d'intersections.

<sup>1</sup>Discuter selon que  $t < a$ ,  $t \in ]a, b[$ ,  $t > b$ .

<sup>2</sup>Au cours du calcul, on pourra avec profit remarquer que :  $\frac{1}{(b-t)(b-s)} = \frac{1}{(t-s)} \left( \frac{1}{(b-t)} - \frac{1}{(b-s)} \right)$ .

## **Problème 3**

Questions préliminaires :

- 1°) Soit  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $b - a > 1$ , montrer qu'il existe  $m \in \mathbb{N}$  tel que  $a < m < b$
- 2°) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $2^{2n+4} \geq 3(2n+1)(2n+3)$



3°) Soit  $A$  et  $B$  deux parties non vides bornées .

Montrer que  $A \cup B$  est bornée et que  $\sup(A \cup B) = \max(\sup(A), \sup(B))$  .

Déterminer , en le justifiant ,  $\inf(A \cup B)$  en fonction de  $\inf A$  et  $\inf B$

#### Partie I :

On se propose de chercher les bornes de  $A = \left\{ \frac{1}{2^n} + \frac{(-1)^n}{n} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$

1°) Montrer que  $A$  est borné .

On pose  $A_1 = \left\{ \frac{1}{2^{2n+1}} - \frac{1}{2n+1} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$  et  $A_2 = \left\{ \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{2n} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$

2°) Montrer que  $\inf A_1 \leq \sup A_1 \leq 0 \leq \inf A_2 \leq \sup A_2$  . Déterminer alors  $\sup A$  .

3°) On pose , pour  $n \in \mathbb{N}$  ,  $b_n = \frac{1}{2^{2n+1}} - \frac{1}{2n+1}$

Comparer pour  $b_{n+1}$  et  $b_n$  . En déduire  $\inf A$

#### Partie II : Une partie dense

On se propose de montrer que  $\{ \sqrt{n} - E(\sqrt{n}) \mid n \in \mathbb{N} \}$  est dense dans  $[0, 1]$

Soit  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $0 \leq a < b \leq 1$

1°)

(a). Montrer qu'il existe un entier  $p \in \mathbb{N}$  tel que :  $(2bp + b^2) - (2ap + a^2) > 1$

(b). En déduire qu'il existe  $k \in \mathbb{N}$  tel que :  $2ap + a^2 < k < 2bp + b^2$

(c). Montrer que  $0 \leq k \leq 2p$

2°) On pose  $n = p^2 + k$

(a). Montrer que  $a < \sqrt{n} - E(\sqrt{n}) < b$

(b). En déduire que :  $\{ \sqrt{n} - E(\sqrt{n}) \mid n \in \mathbb{N} \}$  est dense dans  $[0, 1]$  .

3°) Déterminer un entier  $n$  tel que :  $0.5 < \sqrt{n} - E(\sqrt{n}) < 0.6$

*Fin*  
*Bonne chance*