DL 7 : *Matrices*

A rendre Samedi le 17 Avril 2004

Dans tout le problème, l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ est muni de sa base canonique notée (e_1, e_2, e_3). On note $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ la $\mathbb{R}$-algèbre des endomorphismes de $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ la $\mathbb{R}$-algèbre des matrices d'ordre 3 à coefficients réels et I_3 la matrice identité.

Il est demandé de faire figurer tous les calculs sur la copie.

Partie I

Soit s l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice $S = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ dans la base canonique.

1. Montrer que s est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.
2. Soient $e'_1 = (1, 1, 1)$, $e'_2 = (1, -1, 0)$ et $e'_3 = (1, 1, -2)$.
   (a) Montrer que (e'_1, e'_2, e'_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Déterminer la matrice S' de s dans la base (e'_1, e'_2, e'_3).
   (c) Calculer $(S')^n$ et donner une méthode de calcul de S^n (on ne demande pas d'effectuer lesdits calculs).

   (a) La famille (I_3, S) est-elle libre dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?
   (b) Montrer que S^2 peut s'exprimer sous forme de combinaison linéaire de I_3 et S.
   (c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique couple (a_n, b_n) de réels tel que $S^n == a_n I_3 + b_n S$
   (on convient que : $\forall M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \quad M^0 = I_3$*).*
   (d) Donner les valeurs de a_0, b_0, a_1, b_1, et exprimer, pour $n \in \mathbb{N}$, a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.
   (e) Montrer que la suite $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante,puis que la suite $(b_n + 1)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique.
   (f) En déduire l'expression de a_n et b_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Soit $B = S - 2I_3$.
   (a) Calculer B^n pour $n \in \mathbb{N}$.
   (b) En déduire l'expression de S^n en fonction de I_3 et B pour $n \in \mathbb{N}$ *(on pourra, après justification, utiliser laformule du binô me de Newton).*
   (c) Comparer avec le résultat de la question 3).
4. L'expression de S^n obtenue aux questions 3) et 4) est-elle valable pour $n \in \mathbb{Z}$?

Partie II

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 5 \\ 5 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \end{pmatrix}$ dans la base canonique. On pose : $u = f \circ s^{-1}$ et on note U la matrice de u dans la base canonique.

1. Calculer U ; vérifier que : $u \circ s = s \circ u = f$.
2. Soit $(e''_1 = \frac{e'_1}{\sqrt{3}}, , e''_2 = \frac{e'_2}{\sqrt{2}}, e''_3 = \frac{e'_3}{2\sqrt{2}})$.
   (a) Montrer que (e''_1, e''_2, e''_3) est une base .
   (b) Ecrire la matrice U' de u dans cette base et caractériser géométriquement u.

   (a) Exprimer la matrice de s dans la base (e''_1, e''_2, e''_3) en fonction de S'.
   (b) En déduire la matrice de f dans la base (e''_1, e''_2, e''_3).
3. (a) Quel est l'ensemble des vecteurs invariants par f ?
   (b) Soit $P = \text{Vect }(e''_2, e''_3)$.
      i. Montrer que $f(P) = P$.
      ii. Soit g l'endomorphisme de P tel que pour tout x de P, $g(x) = f(x)$. Montrer que g est la composée de deux applications linéaires simples que l'on reconnaitra.
4. On note $\mathcal{C}(f)$ l'ensemble des endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ commutant avec f, c'est-à-dire l'ensemble des endomorphismes g tels que $f \circ g = g \circ f$.
   (a) Montrer que $\mathcal{C}(f)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$.
   (b) Soit $g \in \mathcal{C}(f)$.
      i. Montrer que le vecteur $g(e''_1)$ est invariant par f. Que peut-on en déduire ?
      ii. Soit M la matrice de g dans la base (e''_1, e''_2, e''_3). Montrer que M commute avec $(S')^3$.
      iii. En déduire la forme générale de la matrice d'un endomorphisme de $\mathcal{C}(f)$ dans la base (e''_1, e''_2, e''_3).
   (c) Quelle est la dimension de l'espace vectoriel $\mathcal{C}(f)$?

DS : 2000-2001 .

FIN