Problème I. *Source Concours HEC 2004, option scientifique.*

Notations : $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ désigne l'ensemble des matrices carrées de dimension 3 sur le corps $\mathbb{C}$. a, b, c sont des nombres complexes. On note I, J et $M(a,b,c)$ les matrices suivantes

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad M(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$$

On note $j = e^{2i\pi/3}$. $j^2 = \overline{j} = e^{4i\pi/3}$ est une autre racine cubique de l'unité.

1. Calculer J^2 et J^3.
2. Déterminer les valeurs propres de J. La matrice J est–elle diagonalisable sur le corps $\mathbb{C}$? L'est-elle sur le corps $\mathbb{R}$?
3. Pour chaque valeur propre de J déterminer le vecteur propre associé ayant 1 pour première composante, et une matrice P de passage à une base de vecteurs propres.
4. Exprimer la matrice $M(a,b,c)$ à l'aide des matrices I, J et J^2. En déduire que $H = \{M(a,b,c) \text{ tel que : } (a,b,c) \in \mathbb{C}^3\}$ est un sous–espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ pour les lois usuelles (somme et loi externe). Précisez la dimension de H.
5. Montrer que les vecteurs propres (complexes) de J sont aussi vecteurs propres de J^2 ainsi que de $M(a,b,c)$. En déduire les valeurs propres de $M(a,b,c)$ à l'aide de celles de J, puis en fonction du nombre complexe j.
6. Montrer que tout élément de H est diagonalisable sur $\mathbb{C}$. Donner la décomposition de $M(a,b,c)$ en fonction de la matrice P du (3) et d'une matrice diagonale que l'on explicitera.
7. On suppose ici que les coefficients (a,b,c) sont réels.
   (a) Montrer que toutes les valeurs propres de $M(a,b,c)$ sont réelles si et seulement si $b = c$.
   (b) Déterminer les valeurs propres de $M(a,b,c)$ ainsi que les *sous-espaces propres réels* associés.

Problème II. *Source Concours ESSEC 2004, option économie.*

On note $\mathbb{R}_N[X]$ l'espace vectoriel formé des polynômes de degré inférieur ou égal à N et du polynme nul ; on désigne par Id l'application identique de $\mathbb{R}_N[X]$ dans $\mathbb{R}_N[X]$.

1. Soit a un nombre réel non nul et P un élément de $\mathbb{R}_N[X]$.
   Justifier que $P(aX+1-a)$ (c'est–à–dire la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$: $x \mapsto P(ax+1-a)$) est un polynôme de même degré que P.

Dans toute la suite de l'exercice, pour tout réel a non nul, on note f_a l'application de $\mathbb{R}_N[X]$ dans $\mathbb{R}_N[X]$ qui à un polynôme P associe le polynôme $P(aX+1-a)$.

2. Soient a et b des nombres réels non nuls.
   (a) Déterminer la composée $f_b \circ f_a$ de f_a par f_b.
   (b) Démontrer que f_a est un isomorphisme de $\mathbb{R}_N[X]$, et préciser sa bijection réciproque, notée $(f_a)^{-1}$.
   (c) On pose : $(f_a)^0 = Id$ et, pour tout entier naturel n : $(f_a)^{n+1} = (f_a)^n \circ f_a$.
   Démontrer que, pour tout entier naturel n : $(f_a)^n = f_{a^n}$.
3. Pour tout réel a non nul, on note M_a la matrice de f_a dans la base canonique $(1, X, \ldots, X^N)$ de $\mathbb{R}_N[X]$.
   (a) Expliciter M_a dans le cas $N = 3$.
   Dans le cas général, donner le coefficient de la $(i+1)$-ième ligne et $(j+1)$–ième colonne de M_a (i et j entiers compris au sens large entre 0 et N).
   (b) n désignant un entier naturel, justifier l'égalité : $(M_a)^n = M_{a^n}$.
   Ce résultat reste–t–il valable si n est un entier négatif ?

4. Préciser l'ensemble des valeurs propres de f_a.
   Pour tout entier k compris au sens large entre 0 et N, calculer $f_a\left((X-1)^k\right)$.
   L'endomorphisme f_a est-il diagonalisable ?

Problème III. Racines carrées de matrices. *Source : Concours national commun français DEUG, 2004.*

On rappelle que $M_3(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices carrées de taille 3 à coefficients réels.
Soit $A \in M_3(\mathbb{R})$, on dit qu'une matrice $R \in M_3(\mathbb{R})$ est une racine carrée de A si $R^2 = A$.
Le but de l'exercice est de chercher les racines carrées de la matrice A dans les deux exemples suivants qui sont **indépendants**.

Exemple 1 Cas où $A = \begin{pmatrix} 11 & -5 & 5 \\ -5 & 3 & -3 \\ 5 & -3 & 3 \end{pmatrix}$**.**

6. Réduction de A
   Déterminer le polynôme caractéristique de A puis justifier l'existence d'une matrice $P \in M_3(\mathbb{R})$ inversible telle que $A = PDP^{-1}$ où $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$.
7. Montrer que R est une racine carrée de A, si et seulement si la matrice $S = P^{-1}RP$ est une racine carrée de D.
8. Racines carrées de D
   Soit S une racine carrée de D.
   (a) Montrer que $DS = SD$.
   (b) Montrer que la matrice S est diagonale.
   (c) Pour $i \in \{1, 2, 3\}$, on note respectivement s_i et d_i les coefficients diagonaux des matrices S et D. Exprimer s_i en fonction de d_i puis en déduire les racines carrées de la matrice D.
9. Ecrire toutes les racines carrées de A à l'aide de la matrice P. (On ne demande pas de calculer P.)

Exemple 2 : Cas où $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$**.**

10. **Question préliminaire : Endomorphisme nilpotent**
    Soit f un endomorphisme non nul de $\mathbb{R}^3$ **nilpotent**, c'est–à–dire vérifiant $f^N = 0$ pour un certain entier naturel N.
    Il existe alors un entier naturel non nul k tel que $f^{k-1} \neq 0$ et $f^k = 0$.
    Le but de la question est de montrer que $k \leq 3$.
    Soit x un vecteur de $\mathbb{R}^3$ tel que $f^{k-1}(x) \neq 0$.
    (a) Montrer que pour $i \in 0, 1, \ldots, k-1$, le vecteur $f^i(x)$ est non nul. (on rappelle que $f^0(x) = x$).
    (b) Montrer que les vecteurs $\left(f^i(x)\right)_{0 \leq i \leq k-1}$ forment une famille libre.
    (c) Que peut-on en déduire pour k ? Justifier votre réponse.
    Remarque : Si une matrice M représente dans une base un endomorphisme f nilpotent, on dit que M est **nilpotente**.
11. Supposons qu'il existe R une racine carrée de A.
    (a) Calculer A^2, A^3. En déduire que R est nilpotente.
    (b) Calculer alors R^4. Comparer avec A^2 puis conclure.

FIN DE L'ÉNONCÉ