MPSI 1 **2002-2003**

CPGE Agadir

Devoir Surveillé N°7

Mercredi le: 19-Mars-2003

Programme : Matrices
Durée : 4 Heures

Probléme 1 :

Dans tous le probléme $p \in IN^*, (\alpha,\beta) \in IR^2$ et A désigne un carré d'ordre p non proportionnelle a I_p verifiant : $A^2 = \alpha A + \beta I_p$

1. (0.75) Montrer l'existence et l'unicité de deux suites réelles $(\alpha_n),(\beta_n)$ telles que : $A^n = \alpha_n A + \beta_n I_p \ ;\forall n \in IN$
2. (0.5) Donner l'expression de α_n,β_n en fonctions des termes précédents et dire comment les exprimer en fonction de n
3. (0.25) $\forall n \in IN$ justifier l'exitence de $Q(X) \in IR[X], (a,b) \in IR$ tels que: $X^n = Q(X)(X^2 - \alpha X - \beta) + aX + b$
4. (0.5) Exprimer a,b en fonction de n,α,β et les solutions de $X^2 - \alpha X - \beta = 0\ (*)$
5. (0.25) En deduire une 2eme méthode pour exprimer A^n en fonction de A, I_p.
6. Application 1 : exprimer A^n en fonction de A, I_p a l'aide des deux méthodes dans chacun des cas suivants:
   - **a**. (0.5)$A^2 = 3A + 2I_p$
   - **b**. (0.75)$A^2 = -A - I_p$
   - **c**. (0.75)$A^2 = 4A - 4I_p$
7. (0.75) Application 2: Trouver toutes les suites réelles $(x_n),(y_n)(z_n)$ vérifiant :
$$\begin{cases} 3x_{n+1} = -x_n - y_n + 5z_n \\ 3y_{n+1} = 5x_n - y_n - z_n \\ 3z_{n+1} = -x_n + 5y_n - z_n \end{cases}$$
8. Soit $u \in \pounds(IR^3)$ tel que $M = M_B(u) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$, B la base canonique de IR^3.
   - **a**. (0.75) Soit $\lambda \in IR$.En calculant $rg(M - \lambda I_3)$ en deduire deux valeurs propres λ_1,λ_2 de $u; \lambda_1 \leq \lambda_2$
   - **b**. (0.75) Trouver une base B_1 de $Ker(u - \lambda_1 id_{IR^3})$ et une base B_2 de $Ker(u - \lambda_2 id_{IR^3})$
   - **c**. (0.5) Montrer que $B' = B_1 \cup B_2$ est une base de IR^3
   - **d**. (0.75) Donner $P_{B\to B'}$, puis a l'aide de la méthode de pivot de Gauss en deduire $P_{B'\to B}$
   - **e**. (0.75)En deduire $M' = M_{B'}(u), (M')^n, M^n.\forall n \in IN$
   - **f**. (0.25)Retrouver le resultat de la question (7)

Probléme 2 :

Soit $(u,v) \in (\pounds(IR^3))^2$ tel que $M = M_B(u) = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -6 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, ${}^tM = M_B(v)$, B la base canonique de IR^3.

Partie 1 :**Valeurs propres de** u :

1. (0.75) Soit $\lambda \in IR$.En calculant $rg({}^tM - \lambda I_3)$ en deduire deux valeurs propres λ_1,λ_2 de

$v; \lambda_1 \geq \lambda_2$

2. (0.75) Donner des bases de $Ker(v - \lambda_1 id_{IR^3}), Ker(v - \lambda_2 id_{IR^3})$, en deduire $\dim(Ker(v - \lambda_1 id_{IR^3})), \dim(Ker(v - \lambda_2 id_{IR^3}))$,
3. soit $(a,b,c) \in IR^3$ et π le plan d'equation : $\pi\ :\ ax + by + cz = 0;$ et $(a', b', c') = (a,b,c)M$
   - **a**. (0.75) Soit $(x,y,z) \in IR^3$ Montrer que : $u(x,y,z) \in \pi \Leftrightarrow a'x + b'y + c'z = 0$
   - **b**. (0.5) En deduire que $\left\{(x,y,z) \in IR^3 \text{tels que } : u(x,y,z) \in \pi\right\}$ est un sev de dimension ≥ 2
   - **c**. (0.75) En deduire π que est stable par $u \Leftrightarrow (a', b', c'), (a,b,c)$ proportionnels
   - **d**. (0.75) Conclure que π est stable par $u \Leftrightarrow (a,b,c) \in Ker(v - \lambda_1 id_{IR^3}) \cup Ker(v - \lambda_2 id_{IR^3})$
   - **e**. (0.75) Conclure que v admet deux plans stables et les determiner
   - **f**. (0.75) En deduire une base $B' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ de telle que

$$M' = M_{B'}(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Partie 1 :**Résolution de l'équation** :$(*)\ :X^2 = M$

1. (0.5) Soit $X \in M_3(IR)$ montrer que $XM' = M'X \Leftrightarrow X$ est de la forme : $\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & \gamma \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$
2. (0.5)A l'aide d'un changement de varaible montrer que $(*) \Leftrightarrow (**)\ :\ Y^2 = M'$
3. (0.75)Montrer que $YM' = M'Y$ en deduire le nombre de solutions de $(**)$ puis celui de $(*)$
4. (0.75) Résourdre $(*)$