MPSI 1 **2002-2003**

CPGE Agadir

Devoir Surveillé N°7

Mercredi le:19-Mars-2003

Corrigé

Probléme 1 :

1. Existence par recurrence, l'unicité car la famille $\{A, I_p\}$ est libre
2. $\alpha_n = \alpha\alpha_{n-1} + \beta\alpha_{n-2}, \beta_n = \beta\alpha_{n-1}, (\alpha_n)$ est une suite récurrente lineaire qu'on determine en raisonnant sur le descriminant de son equation caracteristique :$X^2 - \alpha X - \beta = 0$ puis on exprime β_n
3. Théorème de la division euclidienne
4. Si $(*)$ admet deux solutions r_1, r_2 on aurait le systéme suivant : $\begin{cases} r_1^n = ar_1 + b \\ r_1^n = ar_1 + b \end{cases}$ Si $(*)$ admet une seule solutions r on aurait le systéme suivant : $\begin{cases} r^n = ar + b \\ nr^{n-1} = a \end{cases}$
5. $A^n = aA + bI_p$ prendre $X = A$
6. Faire les calculs
7. Le systéme peut se ramener au suivant : $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$ avec $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 5 \\ 5 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \end{pmatrix}$ d'où $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ on vérifie que : $A^2 = 3A + 2I_p$ on utilise alors 6.a
8. d,
   a. $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$
   b. $B_1 = \{(1,1,1)\}, B_2 = \{(1,-1,0),(1,1,-2)\}$.
   c. B' libre $+ Card(B') = \dim(IR^3 = 3)$
   d. $P_{B\to B'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}, P_{B'\to B} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$
   e. $M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, (M')^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}, M^n = (PM'P^{-1})^n = P(M')^n P^{-1}, P = P$
   f. $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$

Probléme 2 :

Partie 1 :Valeurs propres de u :

1. $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1$
2. base de $Ker(v - \lambda_1 id_{IR})$: $\{(2,1,1)\}$;base de $Ker(v - \lambda_1 id_{IR})$: $\{(2,1,0)\}$; $\dim(Ker(v - \lambda_2 id_{IR})) = 1, \dim(Ker(v - \lambda_2 id_{IR})) = 1$
3. d
   - **a.** $u(x,y,z) = M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \pi \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} a' & b' & c' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$
   - **b.** $\left\{(x,y,z) \in IR^3 \text{tels que} : u(x,y,z) \in \pi\right\} = \left\{(x,y,z) \in IR^3 \text{tels que } a'x + b'y + c'z = 0\right\}$ un plan si l'un des coefficients a', b', c' est non nul et c'est l'espace dans le cas contraire
   - **c.** si $u(\pi) \subset \pi$ d'apres (b) les elements de π verifient les equations : $a'x + b'y + c'z = 0, ax + by + cz = 0$ ainsi le plan aurait deux equations donc forcements les coefficients sont proportionnels
   - **d.** π que est stable par $u \Leftrightarrow v(a,b,c) = (a',b',c') = \lambda(a,b,c)$ $\Leftrightarrow {}^t M \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Leftrightarrow \lambda$ valeur propre de $v \Leftrightarrow \lambda \in \{\lambda_1, \lambda_2\}$
   - **e.** car v admet deux valeur propres donc ses plans sont $\pi_i : ax + by + cz = 0,\ i = 1,2$ tel que ${}^t M \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \lambda \in \{\lambda_1, \lambda_2\}, \pi_1 : 2x + y + z = 0, \pi_2 : 2x + y = 0,$
   - **f.** $e_1' = (2,1,1), e_1' = (2,1,0), e$

Partie 1 :**Résolution de l'équation** :$(*) : X^2 = M$

1. Calcul
2. $Y = PXP^{-1}, P = P_{B \to B'}$
3. facile
4. 4 solutions
5. Calcul