DS 7 : Matrices

Durée : 3 heures

Le problème est tiré du concours commun marocain–2004, option TSI.
Dans ce problème, $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels. La matrice identité de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est notée I_2.

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ appartenant à $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et on désigne par f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à A. On note enfin $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

Première partie

1. (1.5 pts) Montrer que 2 et 3 sont des valeurs propres de la matrice A. Donner la forme générale des vecteurs propres associés.
2. (0.75 pts) Montrer que les sous–espaces vectoriels $\mathrm{Ker}\,(f - 2\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2})$ et $\mathrm{Ker}\,(f - 3\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2})$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^2$.
3. (0.75 pts) Construire une base (e'_1, e'_2) de $\mathbb{R}^2$ avec $e'_1 \in \mathrm{Ker}\,(f - 2\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2})$ et $e'_2 \in \mathrm{Ker}\,(f - 3\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2})$.
4. (0.75 pts) Écrire la matrice D de f dans la base (e'_1, e'_2).
5. (1.75 pts) En déduire qu'il existe une matrice P, inversible d'ordre 2, telle que $A = PDP^{-1}$; expliciter P et P^{-1}.
6. (1.5 pts) Pour tout entier naturel non nul n, calculer la matrice D^n puis en déduire l'expression de A^n sous forme de tableau matriciel.

Deuxième partie

Pour tout entier naturel n et tout réel t, on note $E_n(t)$ la matrice définie par

$$E_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} A^k,$$

avec la convention $A^0 = I_2$. Et on pose :

$$\varphi_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}$$

Cette matrice sera écrite sous la forme $E_n(t) = \begin{pmatrix} a_n(t) & b_n(t) \\ c_n(t) & d_n(t) \end{pmatrix}$.

1. (0.75 pts) Expliciter les coefficients $a_n(t),\ b_n(t),\ c_n(t)$ et $d_n(t)$ de la matrice $E_n(t)$.
2. (a) (0.75 pts) Rappeler l'inégalité de Taylor–Lagrange, ainsi que ses hypothèses, en déduire que $\forall t \in \mathbb{R}, \quad \lim\limits_{n\to+\infty} \varphi_n(t) = e^t$.

   (b) (0.75 pts) Justifier que les suites $\big(a_n(t)\big)_{n\in\mathbb{N}},\ \big(b_n(t)\big)_{n\in\mathbb{N}},\ \big(c_n(t)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\big(d_n(t)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes et expliciter leur limites respectives notées $a(t),\ b(t),\ c(t)$ et $d(t)$.

   Dans la suite, on pose $E(t) = \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ c(t) & d(t) \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$.
3. (0.75 pts) Montrer qu'il existe deux matrices Q et R, éléments de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, telles que
$$E(t) = e^{2t}Q + e^{3t}R.$$
4. (a) (0.75 pts) Que vaut la matrices $Q + R$? Et la matrice $2Q + 3R$?

   (b) (0.75 pts) Montrer que, pour tout réel t, $E(t)$ est une combinaison linéaire des matrices A et I_2.
5. (1.5 pt) Calculer les matrices $Q^2,\ R^2,\ QR$ et RQ.
6. (1.5 pts) Montrer que, pour tout couple (s,t) de réels, $E(s)E(t) = E(s+t) = E(t)E(s)$. En déduire que $E(t)$ est inversible et donner son inverse.
7. (1.5 pts) Montrer que l'application $t \longmapsto E(t)$, de $\mathbb{R}$ vers $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, est injective.

Troisième partie

On considère le système (S) d'équations différentielles

$$(S)\ \begin{cases} x' = x + y \\ y' = -2x + 4y \end{cases}$$

On appelle solution du système (S) tout couple (u,v) de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que, pour tout réel t, on ait

$$\begin{cases} u'(t) = u(t) + v(t) \\ v'(t) = -2u(t) + 4v(t) \end{cases}$$

1. Soit (u,v) une solution de (S) ; pour tout réel t, on pose
$$\begin{pmatrix} u_1(t) \\ v_1(t) \end{pmatrix} = E(-t) \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}.$$

   (a) (0.75 pts) Exprimer les réels $u_1(t)$ et $v_1(t)$ à l'aide de $u(t)$, $v(t)$ et des coefficients de la matrice $E(-t)$.

   (b) (1.5 pts) En déduire que les fonctions u_1 et v_1 sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et calculer leurs dérivées.
2. (1.75 pts) Montrer alors que (u,v) est une solution de (S) si et seulement si existe un couple (α,β) de réels tels que, pour tout réel t, on ait $\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = E(t) \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$.

FIN DE L'ÉPREUVE
BONNE CHANCE