

# DS 7 : Matrices

## Corrigé

### Première partie

1. On cherche  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq 0$  tel que :  $AX = 2X$ , d'où l'équation  $-x + y = 0$ , la forme générale des vecteurs propres associés à 2 est donc  $X = \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}$  tel que :  $x \in \mathbb{R}$ .

De même on cherche  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq 0$  tel que :  $AX = 3X$ , d'où l'équation  $-2x + y = 0$ , la forme générale des vecteurs propres associés à 3 est donc  $X = \begin{pmatrix} x \\ 2x \end{pmatrix}$  tel que :  $x \in \mathbb{R}$ .

2. D'abord il est clair que  $\text{Ker}(f - 2\text{id}_{\mathbb{R}^2}) \cap \text{Ker}(f - 3\text{id}_{\mathbb{R}^2}) = \emptyset$ , de plus d'après la question précédente les sous-espaces vectoriels  $\text{Ker}(f - 2\text{id}_{\mathbb{R}^2})$  et  $\text{Ker}(f - 3\text{id}_{\mathbb{R}^2})$  sont chacun de dimension 1, donc  $\dim \text{Ker}(f - 2\text{id}_{\mathbb{R}^2}) + \dim \text{Ker}(f - 3\text{id}_{\mathbb{R}^2}) = 2 = \dim \mathbb{R}^2$ , donc supplémentaires dans  $\mathbb{R}^2$ .

3. Prendre  $e'_1 = (1, 1)$ ,  $e'_2 = (1, 2)$ .

4.  $f(e'_1) = 2e'_1$ ,  $f(e'_2) = 3e'_2$ , d'où la matrice  $D$  de  $f$  dans la base  $(e'_1, e'_2)$  est  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ .

5. D'après un résultat de cours, on a :  $A = PDP^{-1}$  avec  $P$  la matrice de passage de la base canonique vers la base  $(e'_1, e'_2)$ , d'où  $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$  et  $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ .

6. Pour tout entier naturel non nul  $n$ , on a :  $D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$  d'où :

$$A^n = (PDP^{-1})^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} - 3^n & -2^n + 3^n \\ 2^{n+1} - 2(3^n) & -2^n + 2(3^n) \end{pmatrix}.$$

### Deuxième partie

1.  $a_n(t) = 2\varphi_n(2t) - \varphi_n(3t)$ ,  $b_n(t) = -\varphi_n(2t) + \varphi_n(3t)$ ,  $c_n(t) = 2\varphi_n(2t) - 2\varphi_n(3t)$  et  $d_n(t) = -\varphi_n(2t) + 2\varphi_n(3t)$ .

2. (a) Si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^{n+1}$  sur  $[a, b]$ , alors  $|f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)| \leq M \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$  où

- $M = \sup_{t \in [a,b]} |f^{n+1}(t)|$ . En utilisant cette inégalité pour  $f(t) = e^t$  entre 0 et  $t$ , on obtient
- $$|\varphi_n(t) - e^t| \leq M \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \rightarrow 0 \text{ car } (b-a)^{n+1} = o((n+1)!)$$
- (b)  $\lim a_n(t) = 2e^{2t} - e^{3t}$ ,  $\lim b_n(t) = -e^{2t} + e^{3t}$ ,  $\lim c_n(t) = 2e^{2t} - 2e^{3t}$  et  $\lim d_n(t) = -e^{2t} + 2e^{3t}$ .
3. On a :  $E(t) = \begin{pmatrix} 2e^{2t} - e^{3t} & -e^{2t} + e^{3t} \\ 2e^{2t} - 2e^{3t} & -e^{2t} + 2e^{3t} \end{pmatrix} = e^{2t}Q + e^{3t}R$  avec  $Q = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$  et  $R = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$
4. (a)  $Q + R = I_2$  et  $2Q + 3R = A$ .
- (b) D'après la question précédente on déduit que :  $Q = 3I_2 - A$  et  $R = -2I_2 + A$ , d'où pour tout réel  $t$ , on a :  $E(t) = e^{2t}Q + e^{3t}R = e^{2t}(3I_2 - A) + e^{3t}(-2I_2 + A) = (3e^{2t} - 2e^{3t})I_2 + (e^{3t} - e^{2t})A$  est donc une combinaison linéaire des matrices  $A$  et  $I_2$ .
5. Tout calcul fait on trouve :  $Q^2 = Q$ ,  $R^2 = R$ ,  $QR = 0$  et  $RQ = 0$ .
6. Pour tout couple  $(s, t)$  de réels,  $E(s)E(t) = (e^{2s}Q + e^{3s}R)(e^{2t}Q + e^{3t}R) = (e^{2(s+t)}Q + e^{3(s+t)}R) = E(s+t) = E(t)E(s)$ , en particulier  $E(t)E(-t) = Q + R = I_2$ , donc  $E(t)$  est inversible et dont l'inverse est  $E(-t)$ .
7.  $E(t) = E(s) \implies E(t)E(-s) = I_2 \implies E(t-s) = I_2 \implies e^{2(t-s)} = e^{3(t-s)} \implies 2(t-s) = 3(t-s) \implies t-s = 0 \implies t = s$ , d'où l'application  $t \mapsto E(t)$ , de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ , est injective.

### Troisième partie

1. (a)  $\begin{pmatrix} u_1(t) \\ v_1(t) \end{pmatrix} = E(-t) \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{-2t} - e^{-3t} & -e^{-2t} + e^{-3t} \\ 2e^{-2t} - 2e^{-3t} & -e^{-2t} + 2e^{-3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-2t}(2u(t) - v(t)) + e^{-3t}(-u(t) + v(t)) \\ e^{-2t}(2u(t) - v(t)) + 2e^{-3t}(-u(t) + v(t)) \end{pmatrix}$ , d'où  $u_1(t) = e^{-2t}(2u(t) - v(t)) + e^{-3t}(-u(t) + v(t))$  et  $v_1(t) = e^{-2t}(2u(t) - v(t)) + 2e^{-3t}(-u(t) + v(t))$ .
- (b) On en déduit que les fonctions  $u_1$  et  $v_1$  sont dérivables sur  $\mathbb{R}$  en tant que sommes et produits de fonctions dérivables, avec  $u_1'(t) = -2e^{-2t}(2u(t) - v(t)) - 3e^{-3t}(-u(t) + v(t)) + e^{-2t}(2u'(t) - v'(t)) + e^{-3t}(-u'(t) + v'(t))$ , or  $u$  et  $v$  sont solution de (S) donc  $u'(t) = u(t) + v(t)$  et  $v'(t) = -2u(t) + 4v(t)$ , d'où  $u_1'(t) = 0$  et de même  $v_1'(t) = 0$ .
2. Si  $(u, v)$  est une solution de (S), alors  $u_1'(t) = 0$  et  $v_1'(t) = 0$ , donc  $u_1 = \alpha$  et  $v_1 = \beta$  des constantes, or  $E(-t) \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ , d'où  $\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = E(t) \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ .
- Inversement si  $\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = E(t) \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ , alors  $u(t) = e^{2t}(2\alpha - \beta) + e^{3t}(-\alpha + \beta)$  et  $v(t) = e^{2t}(2\alpha - \beta) + 2e^{3t}(-\alpha + \beta)$ , il est alors simple de vérifier que  $(u, v)$  est une solution de (S).

FIN DU CORRIGÉ  
ET À LA PROCHAINE