DS 7 : Matrices

Corrigé

Première partie

1. On cherche $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq 0$ tel que : $AX = 2X$, d'où l'équation $-x + y = 0$, la forme générale des vecteurs propres associés à 2 est donc $X = \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}$ tel que : $x \in \mathbb{R}$.

   De même on cherche $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq 0$ tel que : $AX = 3X$, d'où l'équation $-2x + y = 0$, la forme générale des vecteurs propres associés à 3 est donc $X = \begin{pmatrix} x \\ 2x \end{pmatrix}$ tel que : $x \in \mathbb{R}$.

2. D'abord il est clair que $\mathrm{Ker}\,(f - 2\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}) \cap \mathrm{Ker}\,(f - 3\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}) = \emptyset$, de plus d'aprés la question précédente les sous–espaces vectoriels $\mathrm{Ker}\,(f - 2\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2})$ et $\mathrm{Ker}\,(f - 3\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2})$ sont chacun de dimension 1, donc $\dim \mathrm{Ker}\,(\text{f-2}\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}) + \dim \mathrm{Ker}\,(\text{f-3}\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}) = 2 = \dim \mathbb{R}^2$, donc supplémentaires dans $\mathbb{R}^2$.

3. Prendre $e'_1 = (1, 1), e'_2 = (1, 2)$.

4. $f(e'_1) = 2e'_1, f(e'_2) = 3e'_2$, d'où la matrice D de f dans la base (e'_1, e'_2) est $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

5. D'aprés un résultat de cours, on a : $A = PDP^{-1}$ avec P la matrice de passage de la base canonique vers la base (e'_1, e'_2), d'où $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

6. Pour tout entier naturel non nul n, on a : $D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$ d'où :

   $A^n = (PDP^{-1})^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} - 3^n & -2^n + 3^n \\ 2^{n+1} - 2(3^n) & -2^n + 2(3^n) \end{pmatrix}$.

Deuxième partie

1. $a_n(t) = 2\varphi_n(2t) - \varphi_n(3t),\ b_n(t) = -\varphi_n(2t) + \varphi_n(3t),\ c_n(t) = 2\varphi_n(2t) - 2\varphi_n(3t)$ et $d_n(t) = -\varphi_n(2t) + 2\varphi_n(3t)$.

2. (a) Si f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[a, b]$, alors $|f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)| \leq M \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$ où

$M = \sup_{t\in[a,b]} |f^{n+1}(t)|$. En utilisant cette inégalité pour $f(t) = e^t$ entre 0 et t, on obtient $|\varphi_n(t) - e^t| \leq M\dfrac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \to 0$ car $(b-a)^{n+1} = o((n+1)!)$

(b) $\lim a_n(t) = 2e^{2t}-e^{3t}$, $\lim b_n(t) = -e^{2t}+e^{3t}$, $\lim c_n(t) = 2e^{2t}-2e^{3t}$ et $\lim d_n(t) = -e^{2t}+2e^{3t}$.

3. On a : $E(t) = \begin{pmatrix} 2e^{2t}-e^{3t} & -e^{2t}+e^{3t} \\ 2e^{2t}-2e^{3t} & -e^{2t}+2e^{3t} \end{pmatrix} = e^{2t}Q + e^{3t}R$ avec $Q = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ et $R = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

4. (a) $Q + R = I_2$ et $2Q + 3R = A$.

   (b) D'aprés la question précédente on déduit que : $Q = 3I_2 - A$ et $R = -2I_2 + A$, d'où pour tout réel t, on a : $E(t) = e^{2t}Q + e^{3t}R = e^{2t}(3I_2 - A) + e^{3t}(-2I_2 + A) = (3e^{2t} - 2e^{3t})I_2 + (e^{3t} - e^{2t})A$ est donc une combinaison linéaire des matrices A et I_2.

5. Tout calcul fait on trouve : $Q^2 = Q,\ R^2 = R,\ QR = 0$ et $RQ = 0$.

6. Pour tout couple (s,t) de réels, $E(s)E(t) = (e^{2s}Q+e^{3s}R)(e^{2t}Q+e^{3t}R) = (e^{2(s+t)}Q+e^{3(s+t)}R) = E(s+t) = E(t)E(s)$, en particulier $E(t)E(-t) = Q + R = I_2$, donc $E(t)$ est inversible et dont l'inverse est $E(-t)$.

7. $E(t) = E(s) \implies E(t)E(-s) = I_2 \implies E(t-s) = I_2 \implies e^{2(t-s)} = e^{3(t-s)} \implies 2(t-s) = 3(t-s) \implies t-s = 0 \implies t = s$, d'où l'application $t \longmapsto E(t)$, de $\mathbb{R}$ vers $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, est injective.

Troisième partie

1. (a) $\begin{pmatrix} u_1(t) \\ v_1(t) \end{pmatrix} = E(-t)\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{-2t}-e^{-3t} & -e^{-2t}+e^{-3t} \\ 2e^{-2t}-2e^{-3t} & -e^{-2t}+2e^{-3t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-2t}(2u(t)-v(t)) + e^{-3t}(-u(t)+v(t)) \\ e^{-2t}(2u(t)-v(t)) + 2e^{-3t}(-u(t)+v(t)) \end{pmatrix}$, d'où $u_1(t) = e^{-2t}(2u(t)-v(t)) + e^{-3t}(-u(t)+v(t))$ et $v_1(t) = e^{-2t}(2u(t)-v(t)) + 2e^{-3t}(-u(t)+v(t))$.

   (b) On en déduit que les fonctions u_1 et v_1 sont dérivables sur $\mathbb{R}$ en tant que sommes et produits de fonctions dérivables, avec $u_1'(t) = -2e^{-2t}(2u(t)-v(t)) - 3e^{-3t}(-u(t)+v(t)) + e^{-2t}(2u'(t)-v'(t)) + e^{-3t}(-u'(t)+v'(t))$, or u et v sont solution de (S) donc $u'(t) = u(t)+v(t)$ et $v'(t) = -2u(t)+4v(t)$, d'où $u_1'(t) = 0$ et de même $v_1'(t) = 0$.

2. Si (u,v) est une solution de (S), alors $u_1'(t) = 0$ et $v_1'(t) = 0$, donc $u_1 = \alpha$ et $v_1 = \beta$ des constantes, or $E(-t)\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$, d'où $\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = E(t)\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$.

   Inversement si $\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = E(t)\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$, alors $u(t) = e^{2t}(2\alpha-\beta) + e^{3t}(-\alpha+\beta)$ et $v(t) = e^{2t}(2\alpha-\beta) + 2e^{3t}(-\alpha+\beta)$, il est alors simple de vérifier que (u,v) est une solution de (S).

FIN DU CORRIGÉ
ET À LA PROCHAINE