DS 8 : *Calcul matriciel*

Samedi 24 Avril 2004

CORRIGÉ

Problème I : *Puissance et commutant d'une matrice .*

Partie I : *Calcul des puissances de A.*

1. λ valeur propre de $f \Leftrightarrow \det(A-\lambda I_3)=0 \Leftrightarrow \det\begin{pmatrix} 3-\lambda & -2 & 3 \\ 1 & -\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix}=0$
   $\Leftrightarrow (2-\lambda)(\lambda(\lambda-3)+2)=0 \Leftrightarrow \lambda\in\{1,2\}$, donc $\lambda_1=1, \lambda_2=2$.
2. $\det(A)=4\neq 0$, donc A non inversible .
3. $(x,y,z)\in E_1 \Leftrightarrow f(x,y,z)=(x,y,z) \Leftrightarrow= X$ où $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ce qui donne $x=y, z=0$ .donc
   $E_1=\{(x,x,0);x\in\mathbb{R}\}$, (1,1,0) est une base de E_1 et $\dim_{\mathbb{R}} E_1=1$.
   Avec le même raisonnement précédent on trouve $E_2=\{(2y,y,0);y\in\mathbb{R}\}$, (2,1,0) est une base de E_2 et $\dim_{\mathbb{R}} E_2=1$.
4. $\overrightarrow{u_1}=(1,1,0)$.
5. $\overrightarrow{u_2}=(2,1,0)$.
6. Posons $P=\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})$ on a : $P=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\det(P)=-1\neq 0$ donc $\mathcal{C}$ libre dans $\mathbb{R}^3$ comme
   $Card(\mathcal{C})=3=\dim_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^3$ alors c'est une base .
7. $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{C}}=\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})=P; P_{\mathcal{C}\to\mathcal{P}}=P^{-1}=\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
8. $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
9. Car $f(\overrightarrow{u_1})=\overrightarrow{u_1}; f(\overrightarrow{u_2})=2\overrightarrow{u_2}; f(\overrightarrow{u_3})=\overrightarrow{u_2}+2\overrightarrow{u_3}$
10. $A=PTP^{-1}$.
11. Par récurrence sur $n\in\mathbb{N}^*$ avec : $\alpha_1=1; \alpha_{n+1}=2^n+2\alpha_n$.
12. Par récurrence sur $n\in\mathbb{N}^*$.
13. $A^n=PT^nP^{-1}$.

Partie II : *Matrices commutant avec A .*

1. Il suffit de vérifier que : $I_3\in C(A); \big((M,N)\in C(A)^2, \lambda\in\mathbb{R} \implies M+\lambda N\in C(A)\big)$.
2. $AM=MA \Leftrightarrow PTP^{-1}M=MPTP^{-1} \Leftrightarrow TP^{-1}MP=P^{-1}MPT \Leftrightarrow TM'=M'T$.

3. Poser $M' = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq 3}$ il est simple de vérifier que $TM' = M'T \Leftrightarrow a_{1,2} = a_{1,3} = a_{2,1} = a_{3,1} = a_{3,2} = 0; a_{2,2} = a_{3,3}$.

4. Utiliser la formule $A = PTP^{-1}$.

5. Toute matrice M de $C(A)$ s'ecrit sous la forme

$$a\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

de là on trouve une famille génératrice de $C(A)$ qu'il est simple de vérifier qu'elle est libre , donc une base de $C(A)$ et par suite $\dim_{\mathbb{R}} C(A) = 3$.

Problème II : *Etude d'un opérateur .*

Partie I : *Réstriction à un sous-espace vectoriel*

1. $\alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2 + \alpha_3\varphi_3 + \alpha_4\varphi_4 = 0 \implies \forall x \in \mathbb{R}, \alpha_1\cos(\pi x) + \alpha_2\sin(\pi x) + \alpha_3 x\cos(\pi x) + \alpha_4 x\sin(\pi x) = 0$, pour $x = 0$ on trouve $\alpha_1 = 0$, pour $x = 1$ on trouve $\alpha_3 = 0$, pour $x = \frac{1}{2}$ et $x = -\frac{1}{2}$ on trouve le systéme $\begin{matrix} \alpha_2 + \frac{1}{2}\alpha_4 = 0 \\ -\alpha_2 + \frac{1}{2}\alpha_4 = 0 \end{matrix}$, donc $\alpha_2 = \alpha_4 = 0$. Donc $\mathcal{B}$ est libre dans F_π et c'en est une famille génératrice par définition de F_π donc base de F_π .

2. Tout calcul fait on trouve : $T(\varphi_1) = 0; T(\varphi_2) = 0; T(\varphi_3) = -\frac{2}{\pi}\varphi_2; T(\varphi_4) = -\frac{2}{\pi}\varphi_1$.

3. Soit $g \in T(F_\pi)$ donc $\exists f \in F_\pi$ tel que $g = T(f)$ or $f \in F_\pi$ donc s'ecrit sous la forme $f = \alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2 + \alpha_3\varphi_3 + \alpha_4\varphi_4$ d'où $g = T(f) = -\alpha_3\frac{2}{\pi}\varphi_2 - \alpha_4\frac{2}{\pi}\varphi_1 \in F_\pi$.

4. $M_\pi = -\frac{2}{\pi}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. $M_\pi^2 = 0$ donc $T_\pi^2 = 0$.

5. De la matrice M_π il est clair que $\mathrm{rg}T_\pi = 2$ avec φ_1, φ_2 une base de $\mathrm{Im}(T_\pi)$

6. $f = \alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2 + \alpha_3\varphi_3 + \alpha_4\varphi_4 \in \mathrm{Ker}(T_\pi) \Leftrightarrow -\frac{2}{\pi}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \alpha_3 = \alpha_4 = 0 \Leftrightarrow f = \alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2$, et donc (φ_1, φ_2) est une base de $\mathrm{Ker}(T_\pi)$.

7. T_π n'est pas injectif car $\mathrm{Ker}(T_\pi) \neq 0$.

Partie II : *Réstriction au sous-espace vectoriel des polynômes .*

1. $\forall 0 \leq k \leq d; T(X^k) = \frac{(X+1)^{k+1} - (X-1)^{k+1}}{k+1}$ est un polynôme de degré k car X^{k+1} se simplifie dans cette expression, et par linéarité de T, $\forall P \in \mathbb{R}_d[X] \deg T(P) = \deg P$ donc $T(P) \in \mathbb{R}_d[X]$ d'où $T(\mathbb{R}_d[X]) \subset \mathbb{R}_d[X]$.

2. $\forall 0 \leq k \leq d; T(X^k) = \frac{(X+1)^{k+1} - (X-1)^{k+1}}{k+1} = \frac{1}{k+1}\sum\limits_{p=0}^{k+1} C_{k+1}^p(1 - (-1)^{k+1-p})X^p$

$= \frac{2}{k+1}\displaystyle\sum_{p=0,\ k+1-p \text{ impair}}^{k+1} C_{k+1}^p X^p = \frac{2}{k+1}\sum_{p=0,\ k-p \text{ pair}}^{k} C_{k+1}^p X^p$ on enléve l'indice $p = k+1$ pourlequel $k+1-p=0$ est pair et pour les autres indices $k+1-p$ impair est remplacé par $k-p$ pair donc $A_d = \begin{pmatrix} 2 & 0 & \frac{2}{3} & \cdots \\ 0 & 2 & 0 & \\ \vdots & \vdots & 2 & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & \\ 0 & 0 & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

3. A_d est une matrice triangulaire dont les termes diagonaux sont tous égaux à 2 donc non nuls et par suite elle est inversible et dont Θ_d est bijectif.

4. Les valeurs propre de Θ_2 sont les solutions de l'équation $\det(A_2 - \lambda I_3) = 0$ c'est à dire $(\lambda - 2)^3 = 0$ donc 2 est l'unique valeur propre de Θ_2.

Partie III : *Résolution d'une équation* .

1. Θ est linéaire (facile). De plus $\forall f \in \mathbb{R}[X]$ on a $f \in \mathbb{R}_d[X]$ avec $d = \deg(f)$ donc $\Theta(f) = T(f) = \Theta_d(f) \in \Theta_d(\mathbb{R}_d[X]) \subset \mathbb{R}_d[X] \subset \mathbb{R}[X]$ d'ou Θ endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

2. $\forall f \in \mathbb{R}[X]$, on a $\Theta(f) = 0 \implies \Theta_d(f) = 0$ où $d = \deg(f)$ or Θ_d bijectif en particulier injectif d'où $f = 0$ donc Θ injectif. D'autre part $\forall g \in \mathbb{R}[X]$ on a $g \in \mathbb{R}_d[X]$ avec $d = \deg(g)$ or Θ_d est bijectif en particulier surjectif donc $\exists f \in \mathbb{R}_d[X]$ tel que $g = \Theta_d(f) = \Theta(f)$ d'où Θ surjectif donc bijectif .

3. Soit$f = a\varepsilon_2 + b\varepsilon_1 + c\varepsilon_0$ tel que $\Theta(f) = h$ alors $\Theta_2(f) = h$, équation qui s'écrit matriciellement sous la forme $A_2 \begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix}$ qui donne les solutions $a = 3, b = 4, c = 1$.

Problème III : *matrices de Toeplitz.*

Partie I

1. $S(\varepsilon_0) = 0, S(\varepsilon_1) = \varepsilon_0, \dots, S(\varepsilon_d) = \varepsilon_{d-1}$.

2. $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & & & 0 \end{pmatrix}$.

3. Par récurrence il est facile de montrer que : $S^k(\varepsilon_0) = 0, S^k(\varepsilon_1) = 0_0, \dots, S^k(\varepsilon_{k-1}) = 0, S^k\varepsilon_j = \varepsilon_{j-k}$ si $j \geq k$ donc $\mathcal{M}(S^k) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & 1 \\ & & & & & \vdots \\ 0 & \dots & & & & 0 \end{pmatrix}$.

4. D'aprés la question précédente pour $k = d$ on a : $S^d(\varepsilon_0) = 0, S^d(\varepsilon_1) = 0_0, \dots, S^d(\varepsilon_{d-1}) = 0, S^d\varepsilon_d = \varepsilon_1$, donc $S^{d+1}(\varepsilon_0) = 0, S^{d+1}(\varepsilon_1) = 0_0, \dots, S^{d+1}(\varepsilon_d) = 0$, donc $S^{k+1} = 0$ sur un base,

par linéarité $S^{k+1}=0$.

Soit $(\alpha_k)_{0\leq k\leq d}\in\mathbb{R}^{d+1}$ tel que $\alpha_0 I_d+\alpha_1 S+\ldots+\alpha_d S^d=0$, en composant par S^{d+1} dans cette égalité on trouve $\alpha_0=0$ (NB : $S^k=0,\forall k\geq d+1$ car $S^{d+1}=0$ .puis on compose par S^d pour trouver $\alpha_1=0$ et ainsi de suite jusqu'à annuler toutes les constantes donc $(I_d,S,S^2,\ldots,S^d)$ est une famille libre de $\mathcal{L}(\mathbb{R}_d[X])$.

5. On a $S(\varepsilon_j)=\sum\limits_{i=0}^{d} b_{i,j}\varepsilon_i$, et $S(\varepsilon_0)=0,S(\varepsilon_1)=\varepsilon_0,\ldots,S(\varepsilon_d)=\varepsilon_{d-1}$,donc $u\in\mathcal{U}\Leftrightarrow uoS(\varepsilon_j)=Sou(\varepsilon_j),\forall 0\leq j\leq d\Leftrightarrow u(\varepsilon_{j-1})=S(\sum\limits_{i=0}^{d} b_{i,j}\varepsilon_i);\forall 1\leq j\leq d$ et $0=S(\sum\limits_{i=0}^{d} b_{i,0}\varepsilon_i)$ pour $j=0\Leftrightarrow \sum\limits_{i=0}^{d} b_{i,j-1}\varepsilon_i)=\sum\limits_{i=1}^{d} b_{i,j}\varepsilon_{i-1})$ et $0=\sum\limits_{i=1}^{d} b_{i,0}\varepsilon_{i-1})\Leftrightarrow \sum\limits_{i=1}^{d} b_{i-1,j-1}\varepsilon_{i-1})=\sum\limits_{i=1}^{d} b_{i,j}\varepsilon_{i-1})$, (changement d'indice dans la 1ere somme i étant remplacé par $i-1$) et $b_{i,0}=0,\forall i\geq 1\Leftrightarrow b_{i,j}=b_{i-1,j-1}$ et $b_{i,0}=0,\forall i\geq 1\Rightarrow b_{i,j}=b_{0,j-i}=0$ si $j>i$ donc la matrice est triangulaire. Pour la réciproque reprendre le raisonnemnt précédent de la fin pour monter la démonstration.

6. Soit $u\in\mathcal{L}(\mathbb{R}_d[X])$, $u\in\mathcal{U}\Leftrightarrow\exists(\alpha_j)_{0\leq j\leq d}$ tel que $u=\alpha_0 I_d+\alpha_1 S+\ldots+\alpha_d S^d\Leftrightarrow B=\alpha_0 I_d+\alpha_1 J+\ldots+\alpha_d J^d$ d'aprés la forme des matrices J^k trouvée précédement (des 1 sur une diagonale et partout des zéros) on conclut que dans la 1ére diagonale $(b_{i,i+1})_{0\leq i\leq d-1}$ il n'y a que des α_0, donc $b_{0,1}=b_{i,i+1}$; dans l'autre diagonale $(b_{i,i+2})_{0\leq i\leq d-2}$ il n'y a que des α_1,donc $b_{0,2}=b_{i,i+2}$; et dans le cas général $b_{0,j}=b_{i,i+j}$ donc $b_{i,j}=b_{0,j-i}$ et pour terminer ; toutes les matrices J^k sont triangulaires dons B aussi puisque c'en est une combinaison linéaire .

Partie II :

1. $u=\sum\limits_{k=1}^{d}\lambda_k S^k=SS'$ avec $S'=\sum\limits_{k=1}^{d}\lambda_k S^{k-1}$, il est clair que $SS'=S'S$ d'où $u^{d+1}=(SS')^{d+1}=S^{d+1}S'^{d+1}=0$ car $S^{d+1}=0$.

   Avec le même raisonnement adapté pour montrer que $(I_d,S,S^2,\ldots,S^d)$ est une famille libre de $\mathcal{U}$ on montrer aussi que $(I_d,u,u^2,\ldots,u^d)$ est une famille libre de $\mathcal{U}$ et comme son cardinal est égal à la dimension de $\mathcal{U}$ on conclut que c'est une base .

2. Comme $\mathrm{Card}(e_0,\ldots,e_d)=d+1=\dim\mathbb{R}_d[X]$ il suffit de montrer que $(e_0,\ldots,e_d)$ est libre. En effet, soit $(\alpha_j)_{0\leq j\leq d}\in\mathbb{R}^{d+1}$ tel que $\alpha_0 e_0+\alpha_1 e_1+\ldots+\alpha_d e_d=0$, donc $\alpha_0 u^d(e_d)+\alpha_1 u^{d-1}(e_d)+\ldots+\alpha_d e_d=0$, on applique à cette égalité u^d, comme $u^j=0,\forall j\geq d+1$ il reste $\alpha_d u^d(e_d)=\alpha_d e_0=0$ donc $\alpha_d=0$, on applique cette fois u^{d-1} pour trouver $\alpha_{d-1}=0$ et ainsi de suite jusqu'à annuler tous les coefficients .

   $u(e_0)=u^{d+1}(e_d)=0;u(e_1)=u^d(e_d)=e_0;\ldots;u(e_d)=e_{d-1}$, d'où $\mathcal{M}(u)=J$.

Fin du corrigé

FIN

Mamouni My Ismail PCSI 2 Casablanca Maroc