بِسمِ اللَّهِ الرَّحمَنِ الرَّحِيم
وَ عَلَى اللَّهِ فَليَتَوَكَّلِ المُتَوَكِّلون

صَدَقَ اللَّهُ العَظِيم

Corrigé Contrôle (07-08) : *Calcul matriciel*

Lundi 17 Mars 2008.

1) Evident car $A^3+A=0$

2) a) u injectif donc bijectif car endomorphisme en dimension finie, donc A inversible, en multipliant l'égalité $A^3+A=0$ par A^{-1}, on en déduit que $A^2=-I_3$, d'où $u^2=-id_E$. Donc $\det(u^2)=\det(-id_E)$, d'où $\det(u)^2=-1$, impossible car $\det u\in\mathbb{R}$.

b) u n'est pas injective, donc $0\neq\ker u\subset\mathbb{R}^3$, d'où $\dim\ker u\in\{1,2\}$.

3) $x\in\ker u\cap\ker(u^2+id_E)\Longrightarrow u(x)=u^2(x)+x=0\Longrightarrow x=0$. D'autre part $\forall x\in E$, on a : $u^3(x)+u(x)=0$, donc $x+u(x)\in\ker u$ et $-u(x)\in\ker(u^2+id_E)$, avec $x=x+u(x)-u(x)$, d'où $E=\ker u\oplus\ker(u^2+id_E)$. On a $\dim E=3, \dim\ker u\in\{1,2\}$, d'où $\ker(u^2+id_E)\in\{1,2\}$.

4) a) $x\in F=\ker(u^2+id_E)\Longrightarrow u^2(x)=-x\Longrightarrow(u^2+id_E)u(x)=u^3(x)+u(x)=u(u^2(x)+x)=u(0)=0\Longrightarrow u(x)\in\ker(u^2+id_E)=F$, d'où F est stable par u.

b) $\forall x\in F=\ker(u^2+id_E)$ on a $v^2(x)=u^2(x)=-x$, donc $v^2=-id_F$.

c) Posons $r=\dim F$, donc $\det v^2=(-1)^r$, or $\det(v^2)=(\det v)^2\geq 0$, d'où r pair avec $r\in\{1,2\}$, donc $r=2$.

d) Supposons que v admet une valeur propore réelle, λ, donc $\exists x\neq 0$ tel que $v(x)=\lambda x$, d'où $v^2(x)=\lambda^2x=-x$, d'où $\lambda^2=-1$, impossible.

5) a) card $\{e'_2,e'_3\}=2=\dim F$, il suffit de montrer qu'elle est libre, en effet supposons que $\alpha e'_2+\beta e'_3=0$, or $e'_3=u(u'_2)$, donc $\alpha u(e'_2)+\beta u^2(e'_3)=0$, donc $\alpha e'_3-\beta e'_3=0$, car $u=v$ sur F et $v^2=-id_F$, ainsi $\alpha=\beta$, d'où $\alpha(e'_2+u(e'_2))=0$, d'autre part $u(e'_2)\neq -e'_2$ car $u=v$ sur F n'admet pas de valeurs propres, donc $\alpha=\beta=0$.

b) $\mathcal{B}'=(e'_1,e'_2,e'_3)$ base de E, car $E=\ker u\oplus F$. De plus $u(e'_1)=0, u(e'_2)=e'_3, u(e'_3)=u^2(e'_2)=-e'_2$, d'où $\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(u)=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix}$

c) A et B semblables car matrices d'un même endomorphisme dans deux bases différentes.

Fin