بِسمِ اللَّهِ الرَّحمَنِ الرَّحِيم
وَ عَلَى اللَّهِ فَلْيَتَوَكَّلِ الْمُتَوَكِّلُون

صَدَقَ اللَّهُ العَظِيم

Corrigé Contrôle (07-08) : *Calcul matriciel*

Vendredi 14 Mars 2008.

EXERCICE.

Corrigé en TD.

PROBLÉME.

1) λ valeur propre de $A \iff \det(A - \lambda I_3) = 0$, de même pour B, les calculs en Maple©donnent

```
> with(linalg):
> A:= Matrix([[5-x,5,-14],[6,6-x,-16],[5,5,-14-x]]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 5-x & 5 & -14 \\ 6 & 6-x & -16 \\ 5 & 5 & -14-x \end{bmatrix}$$

```
> factor(det(A));
```

$$-x\,(x+4)\,(x-1)$$

```
> B:= Matrix([[8-x,4,-16],[0,4-x,-8],[4,4,-12-x]]);
```

$$B := \begin{bmatrix} 8-x & 4 & -16 \\ 0 & 4-x & -8 \\ 4 & 4 & -12-x \end{bmatrix}$$

```
> factor(det(B));
```

$$-x\,(x-4)\,(x+4)$$

Les valeurs propres de A sont : 0,-4 et 1 celles de B sont 0,4 et -4.

2) $\operatorname{card}\{e_1', e_2', e_3'\} = 3 = \dim \mathbb{R}^3$, il suffit de monter qu'elle est libre, c-à-d son déterminant non nul, en Maple©on obtient :

```
> P:= Matrix([[1,1,1],[2,-1,1],[1,0,1]]);
```

$$P := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> det(P);
```

$$-1$$

3) P est inversible car matrice de passage, son inverse est :

```
> Q:=inverse(P);
```

$$Q := \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

4) Les calculs faits en Maple© donnent :

```
> subs(x=0,evalm(Q&*A&*P));
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

5) a) $ND = P^{-1}MAP$ et $DN = P^{-1}AMP$, donc $ND = DN \iff MA = AM$.

b) Les calculs en Maple© donnent :

```
> N:=Matrix([[a,b,c],[d,e,f],[g,h,j]]);
```

$$N := \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{bmatrix}$$

```
> evalm(N&*D1-D1&*N);
```

$$\begin{bmatrix} 0 & -b & -5\,c \\ d & 0 & -4\,f \\ 5\,g & 4\,h & 0 \end{bmatrix}$$

Donc N est une matrice diagonale.

c) $AM = MA \iff N = P^{-1}MP$ est une matrice diagonale, autrement dit A est diagonalisable.

6) Supposons qu'elle existe une matrice Q telle que $Q^2 = A$, donc $AQ = Q^3 = AQ$, d'où $N = P^{-1}QP = diag(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ diagonale, or $Q^2 = A$, d'où $N^2 = D$, en particulier $\lambda^3 = -4$, impossible.

7) a) Les calculs en Maple© donnent :

```
> D1:=subs(x=0,evalm(Q&*B&*P));
```

$$D1 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

b) Les calculs en Maple©donnent :

```
> with(LinearAlgebra):
> X_0 := <<1,0,1>>;X_1:=<<0,1,-1>>;
```

$$X\_0 := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$X\_1 := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

```
> Y_0:=evalm(Q&*X_0);Y_1:=evalm(Q&*X_1);
```

$$Y\_0 := \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$Y\_1 := \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}$$

c) Découle des relaions $X_{n+2} = AX_{n+1} + NX_n, X_n = PY_n, A = PDP^{-1}$ et $B = PD_1P^{-1}$.

d) Découle directement de la realtion $Y_{n+2} = DY_{n+1} + D_1Y_n$.
- $u_{n+2} = u_{n+1}$, donc la suite (u_n) est constante pour $n \geq 1$, d'où $u_n = u_1 = -3$.
- $v_{n+2} = 4v_n$, donc $v_{2n} = 4^n v_0 = 0$ et $v_{2n+1} = 4^n v_1 = 4^n$.
- $w_{n+2} + 4w_{n+1} + 4w_n = 0$, l'équation caractéristique associée $r^2 + 4r + 4 = 0$ admet une racine réelle unique $r = -2$, donc $w_n = (\lambda + \mu n)(-2)^n$, à l'aide des conditions initiales $w_0 = 2, w_1 = -4$, permet de trouver $\lambda = 2, \mu = 0$, donc $w_n = (-2)^n$.

e)

```
> Y_pair:=<<-3,0,4^n>>;Y_impair:=<<-3,4^n,-2*4^n>>;
```

$$Y\_pair := \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 4^n \end{bmatrix}$$

$$Y\_impair := \begin{bmatrix} -3 \\ 4^n \\ -2\,4^n \end{bmatrix}$$

```
> X_pair:=evalm(P&*Y_pair);X_impair:=evalm(P&*Y_impair);
```

$$X\_pair := \begin{bmatrix} -3+4^n \\ -6+4^n \\ -3+4^n \end{bmatrix}$$

$$X\_impair := \begin{bmatrix} -3-4^n \\ -6-3\,4^n \\ -3-2\,4^n \end{bmatrix}$$

8) a) car $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

b) L'équation $(u(t), v(t), w(t)) = x(t)e'_1 + y(t)e'_2 + z(t)e'_3$ s'écrit sous la forme d'un système linéaire suivant : $\begin{cases} u(t) = x(t)+y(t)+z(t) \\ v(t) = 2x(t)-y(t)+z(t) \\ w(t) = x(t)+z(t) \end{cases}$ dont l'écriture matricielle est $Y(t) = PX(t)$ où $Y(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix}, X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$

c) On a $X(t) = P^{-1}Y(t)$, les calculs en Maple©, donnent :

```
> X(t):=evalm(Q&*Y(t));
```

$$X(t) := \begin{bmatrix} u(t)+v(t)-2\,w(t) \\ u(t)-w(t) \\ -u(t)-v(t)+3\,w(t) \end{bmatrix}$$

Donc $x(t), y(t)$ et $z(t)$ sont dérivables en tant que somme et produits des fonctions dérivables $u(t), v(t), w(t)$.

d) Le système (1) s'écrit matriciellement $Y'(t) = BY(t)$, or $Y(t) = PX(t)$, donc $Y'(t) = PX'(t)$, d'où $PX'(t) = BPX(t)$, donc $X'(t) = P^{-1}BPX(t) = D_1X(t)$ ce qui donne exactement les équations (2).

e) $x(0) = y(0) = 1, z(0) = -1$.

f)
- $x'(t) = 0 \Longrightarrow x(t) = Cte = x(0) = 1$.
- $y'(t) = 4y(t) \Longrightarrow y(t) = \lambda e^{4t}$, or $y(0) = 1$, d'où $\lambda = 1$.
- $z'(t) = -4z(t) \Longrightarrow z(t) = \lambda e^{-4t}$, or $z(0) = -1$, d'où $\lambda = -1$.

g) Comme $Y(t) = PX(t)$, les calculs en Maple © donnent :

```
> X(t):=<<1,exp(4*t),-exp(-4*t)>>;Y(t):=evalm(P&*X(t));
```

$$X(t) := \begin{bmatrix} 1 \\ e^{4\,t} \\ -e^{-4\,t} \end{bmatrix}$$

$$Y(t) := \begin{bmatrix} 1+e^{4\,t}-e^{-4\,t} \\ 2-e^{4\,t}-e^{-4\,t} \\ 1-e^{-4\,t} \end{bmatrix}$$

Fin