L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats du concours TSI,
comporte 3 pages.
L'usage de la calculatrice est interdit .

Les candidats sont informés que la précision des raisonnements ainsi que le soin apporté à la rédaction et à la présentation des copies seront des éléments pris en compte dans la notation. Il convient en particulier de rappeler avec précision les références *des questions abordées*

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

EXERCICE

Soit A une matrice réelle d'ordre 3 telle que $A \neq 0$ et $A^3 + A = 0$. On note E le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de E et u l'endomorphisme de E dont la matrice relativement à la base $\mathcal{B}$ est A.

1. Vérifier que $u^3 + u = 0$ et que u n'est pas l'endomorphisme nul.
2. (a) On suppose que u est injectif ; montrer que $u^2 = -id_E$ et trouver une contradiction.
   (b) Justifier alors que $\dim \operatorname{Ker} u \in \{1, 2\}$.
3. Montrer que E est somme directe des sous-espaces vectoriels $\operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Ker}(u^2 + id_E)$. Quelles sont alors les valeurs possibles de la dimension du sous-espace vectoriel $\operatorname{Ker}(u^2 + id_E)$?
4. On pose $F = \operatorname{Ker}(u^2 + id_E)$.
   (a) Vérifier que F est stable par u. On note v l'endomorphisme induit par u sur F.
   (b) Vérifier que $v^2 = -id_F$.
   (c) Préciser le déterminant de v^2 en fonction de la dimension de F et en déduire que $\dim F = 2$.
   (d) Montrer que l'endomorphisme v n'a aucune valeur propre.
5. On considère un vecteur e'_1 non nul de $\operatorname{Ker} u$, un vecteur e'_2 non nul de F et on pose $e'_3 = u(e'_2)$.
   (a) Montrer que la famille (e'_2, e'_3) d'éléments de F est libre.
   (b) Montrer que la famille $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une base de E et écrire la matrice B de u dans cette base.
   (c) Que peut-on alors dire des matrices A et B ?

PROBLÈME

Définitions et notations

Dans tout le problème, E désigne un espace vectoriel euclidien de dimension $n \geqslant 2$ muni d'un produit scalaire noté $(.|.)$; la norme euclidienne sur E associée à ce produit scalaire est notée $\|.\|$.

On rappelle qu'un endomorphisme f de E est dit symétrique si

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad (f(x)|y) = (x|f(y)).$$

Un endomorphisme symétrique de E est dit positif si, pour tout $x \in E$, $(f(x)|x) \geqslant 0$.