L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats du concours BCPST,
comporte 3 pages.
L'usage de la calculatrice est interdit .

Les candidats sont informés que la précision des raisonnements ainsi que le soin apporté à la rédaction et à la présentation des copies seront des éléments pris en compte dans la notation. Il convient en particulier de rappeler avec précision les $\boxed{\text{références}}$ *des questions abordées*

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

PROBLÈME 1

On considère les matrices carrées suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 5 & -14 \\ 6 & 6 & -16 \\ 5 & 5 & -14 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 8 & 4 & -16 \\ 0 & 4 & -8 \\ 4 & 4 & -12 \end{pmatrix}.$$

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$; on rappelle que $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$ et $e_3 = (0,0,1)$.

1. Déterminer les valeurs propres de A ainsi que les sous-espaces propres associés.

2. On pose $e'_1 = (1,2,1)$, $e'_2 = (1,-1,0)$ et $e'_3 = (1,1,1)$. Vérifier que ces vecteurs forment une base de $\mathbb{R}^3$.

3. On note P la matrice la matrice de passage de la base canonique $\mathbb{R}^3$ à la base (e'_1, e'_2, e'_3) ; Justifier que P est inversible et calculer son inverse noté P^{-1}.

4. Calculer la matrice produit $D = P^{-1}AP$.

5. On cherche les matrices M, réelles d'ordre 3, telles que $AM = MA$.
   (a) Soit M une matrice réelles d'ordre 3 ; on pose $N = P^{-1}MP$. Montrer que $AM = MA$ si et seulement si $ND = DN$.
   (b) Déterminer toutes les matrices N, réelles d'ordre 3, telles que $ND = DN$.
   (c) En déduire l'ensemble des matrices M, réelles d'ordre 3, telles que $AM = MA$.

6. Existe-t-il une matrice Q, réelle d'ordre 3, telle que $Q^2 = A$?

7. On considère la suite $(X_n)_{n\geqslant 0}$ des matrices, à 3 lignes et une colonne, définies par les relations

$$X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad X_{n+2} = AX_{n+1} + BX_n.$$

   Pou tout entier naturel n, on note $Y_n = P^{-1}X_n$ et on pose $Y_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$.

   (a) Calculer la matrice produit $D_1 = P^{-1}BP$.
   (b) Calculer Y_0 et Y_1.

(c) Montrer que, pour tout entier naturel n, $Y_{n+2} = DY_{n+1} + D_1 Y_n$.

(d) Vérifier que, pour tout entier naturel n, $u_{n+2} = u_{n+1}$, $v_{n+2} = 4v_n$ et $w_{n+2} = -4w_{n+1} - 4w_n$, puis donner les expressions explicites de u_n, v_n et w_n en fonction de l'entier n.

(e) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, donner l'expression explicite de X_n en fonction de n.

8. On considère trois fonctions u, v et w de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, dérivables sur $\mathbb{R}$ et vérifiant le système d'équations différentielles

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} u'(t) = 8u(t) + 4v(t) - 16w(t) \\ v'(t) = 4v(t) - 8w(t) \\ w'(t) = 4u(t) + 4v(t) - 12w(t) \end{array} \right.$$

(a) Justifier que, pour tout réel t, il existe un unique triplet $(x(t), y(t), z(t))$ de réels tel que $(u(t), v(t), w(t)) = x(t)e'_1 + y(t)e'_2 + z(t)e'_3$.

(b) Exprimer les fonctions x, y et z en fonction de u, v et w, puis en déduire qu'elle sont dérivable sur $\mathbb{R}$.

(c) Montrer que le système d'équations différentielles (1) équivaut au système

$$(2) \left\{ \begin{array}{l} x'(t) = 0 \\ y'(t) = 4y(t) \\ z'(t) = -4z(t) \end{array} \right.$$

(d) On suppose que $u(0) = 1$ et que $v(0) = w(0) = 0$; calculer alors $x(0)$, $y(0)$ et $z(0)$.

(e) Résoudre le système (2) avec les conditions initiales $x(0)$, $y(0)$ et $z(0)$ trouvées à la question précédente.

(f) En déduire la solution de (1) vérifiant les conditions initiales $u(0) = 1$ et $v(0) = w(0) = 0$.

PROBLÈME 2

1. Soient α et β deux réels positifs ou nuls et $g_{\alpha,\beta}$ la fonction définie sur l'intervalle $]0, 1[$ par

$$g_{\alpha,\beta}(t) = t^\alpha (1-t)^\beta.$$

(a) Montrer que $g_{\alpha,\beta}$ peut se prolonger en une fonction continue à droite en 0 et à gauche en 1. On notera encore $g_{\alpha,\beta}$ la fonction ainsi obtenue ; préciser $g_{\alpha,\beta}(0)$ et $g_{\alpha,\beta}(1)$ selon les valeurs de α et β.

Dans la suite, on pose $\quad I(\alpha, \beta) = \displaystyle\int_0^1 g_{\alpha,\beta}(t)\, dt = \int_0^1 t^\alpha (1-t)^\beta\, dt.$

(b) Calculer $I(\alpha, 0)$.

(c) Comparer $I(\alpha, \beta)$ et $I(\beta, \alpha)$.

(d) Trouver une relation entre $I(\alpha + 1, \beta)$ et $I(\alpha, \beta + 1)$.

(e) En déduire soigneusement que, pour tout entier naturel n, on a

$$I(\alpha, n) = \frac{n!}{(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+n+1)}.$$

2. Pour tout réel a strictement positif, on note f_a la fonction définie par

$$f_a(x) = x \ln\left(1 - \frac{a}{x}\right).$$

(a) Préciser le domaine de définition de la fonction f_a.