Contrôle 10 : *Calcul matriciel.*

MPSI-Maths.
Mr Mamouni : *myismail1@menara.ma*

Mercredi 02 Mai 2007.

Durée: 1 heure.

Conseils pour la rédaction et la présentation des copies.

– Chaque variable utilisée dans une démonstration doit être définie.
– L'énoncé ne doit pas être recopié sur les copies.
– Chaque résutat annoncé doit être justifié en citant précisément le théorème du cours avec ses hypothèses exactes utilisé ou en citant le numéro de la question précèdente utilisée.
– Les résultats importants doivent être simplifiés et encadrés.
– Les calculs doivent être détaillés et expliqués à l'aide de phrases simples.
– Laisser une marge à gauche de chaque feuille, en tirant un trait vertical, et un horizontal de la 1ère double feuille pour la note et les remarques du correcteur.
– Numéroter les double feuille de la façon suivante : 1/n,2/n,...,n/n où n est le nombre total de double feuille.
– Les questions doivent être traités dans l'ordre de l'énoncé.
– Tirer deux traits diagonaux pour rayer une partie du raisonnement que vous considérez fausse.

Barème.

1)	2)	3)	4)	5)	
1 point	0.5 point	2 points	2 points	a) 2 points	b) 0.5 point
				c) 1 point	b) 2 point

Présentation et rédaction. *1 points.*

Exercice.

1) Montrer que pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on a la relation suivante :
$$A^2 - \mathrm{Tr}\,(A)\,A + (\det A)I_2 = 0$$

Dans toute la suite du problème, on prend $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

2) Justifier la relation suivante : $A^2 - 2A - 3I_2 = 0$.

3) Soit $n \in \mathbb{N}$.
Donner le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 - 2X - 3$.
En déduire l'expression de A^n en fonction de A et I_2.

4) Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, l'existence de réels a_n, b_n tel que $A^n = a_n A + b_n I_2$.
Exprimer a_n et b_n en fonction de n. Comparer le résultat trouvé avec celui de **3)**.

5) Soit $n \in \mathbb{N}$.

a) Montrer que A admet exactement deux valeurs propres $\lambda_1 < \lambda_2$, donner les vecteurs propres associés $\varepsilon_1, \varepsilon_2$.

b) Montrer que $\mathcal{E} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

c) Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à A.
Calculer $f(\varepsilon_1), f(\varepsilon_2)$, en déduire $D = \mathcal{M}_{\mathcal{E}}(f)$, puis D^n.

d) Donner la relation liant A et D, puis en déduire A^n.
Comparer avec les résultats précédents.

Fin.