Contrôle 5 : *Matrices. Fractions rationnelles.*

MPSI-Maths.
Mr Mamouni : *myismail1@menara.ma*

Mercredi 11 Avril 2007.

Durée: 1 heure.

Conseils pour la rédaction et la présentation des copies.

- Chaque variable utilisée dans une démonstration doit être définie.
- L'énoncé ne doit pas être recopié sur les copies.
- Chaque résutat annoncé doit être justifié en citant précisément le théorème du cours avec ses hypothèses exactes utilisé ou en citant le numéro de la question précèdente utilisée.
- Les résultats importants doivent être simplifiés et encadrés.
- Les calculs doivent être détaillés et expliqués à l'aide de phrases simples.
- Laisser une marge à gauche de chaque feuille, en tirant un trait vertical, et un horizontal de la 1ère double feuille pour la note et les remarques du correcteur.
- Numéroter les double feuille de la façon suivante : 1/n,2/n,...,n/n où n est le nombre total de double feuille.
- Les questions doivent être traités dans l'ordre de l'énoncé.
- Tirer deux traits diagonaux pour rayer une partie du raisonnement que vous considérez fausse.

Barème.

Exercice 1	4 points	Exercice 2	4 points
1)	1 point	1.a)	0.5 point
2)	1.5 point	b)	0.5 point
3.)	1.5 point	c)	0.5 point
		d)	0.25 point
		2.a)	0.25 point
		b)	1 point
		c)	1 point

Présentation et rédaction. *2 points.*

EXERCICE I. Matrices.

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, associée à un endomorphisme f d'un $\mathbb{R}-$espace vectoriel , de dimension n, dans une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$.

a) Calculer $f(e_k)$, pour tout $1 \leq k \leq n$.

b) En déduire $f^2(e_k)$, pour tous $1 \leq k \leq n$, puis la forme de la matrice A^2.

c) En déduire $f^p(e_k)$, pour tous $1 \leq k, p \leq n$, puis la forme de la matrice A^p.

d) En déduire que $f^n = 0$, puis que $A^n = 0$.

2) Inversement soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{R}-$espace vectoriel , de dimension n tel que $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$.

a) Justifier l'existence d'un $x_0 \in E$ tel que $f^{n-1}(x_0) \neq 0$.

b) En déduire que la famille $\mathcal{B} = (x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ est une base de E.

c) Donner $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$.

EXERCICE II. Fractions rationnelles.

1) Donner le $DL_{n-1}(0)$ de la fonction $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$.

En déduire la décomposition en élèment simple de $F(X) = \dfrac{1}{X^n(X+2)}$.

2) Donner le $DL_{n-1}(0)$ de la fonction $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2}$.

En déduire la décomposition en élèment simple de $F(X) = \dfrac{1}{X^n(X+1)^2}$.

3) Décomposer en élèment simple dans $\mathbb{C}$, intégrer puis dériver n fois la fraction rationnelle suivante :

$$F(X) = \frac{X^2}{(X^2-1)(X^2+1)}$$

Fin.