CPGE My Youssef, Rabat

بِسمِ اللَّهِ الرَّحمَنِ الرَّحِيمِ
وَ قُلِ إِعمَلُوا فَسَيَرَى اللَّهُ عَمَلَكُم وَ رَسُولُهُ وَ المُؤ مِنُون

صَدَقَ اللَّهُ العَظِيم

DL 21 Bis(08-09): *Matrices et applications linéaires.*

7 juin 2009

Blague du jour :
Un gendarme fait stopper une automobile :
- Vous n'aviez pas vu le feu rouge ?
- Si si. C'est vous que je n'avais pas vu !

Personnalité du jour ***Toeplitz***
Otto Toeplitz (1881-1940) est un mathématicien allemand. Il était issu d'une famille de mathématiciens. Excellent pédagogue, Toeplitz s'intéressait aussi à l'histoire des mathématiques. On lui doit les matrices dites de Toeplitz, dont toutes les diagonales sont constantes, ces matrices sont trés utilisées dans les théorie de compléxité et d'analyse de Fourrier.

PROBLÈME : **Source : Concours Marocain, BCPST-2007.**

Dans tout le problème, $\mathbb{R}$ désigne le corps des réels et n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Si $p \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices à coefficients réels, à n lignes et p colonnes ; pour toute matrice A de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, ${}^tA$ désigne la matrice transposée de A.

Si $p = n$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est noté simplement $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, c'est l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels ; la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est notée I_n.

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $C_1(A), \ldots, C_n(A)$ les colonnes de A, ce sont des éléments de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$; par définition, le rang de la matrice A est la dimension du sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ engendré par les vecteurs $C_1(A), \ldots, C_n(A)$. Le rang de A se note $\mathrm{rg}(A)$, on note aussi $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A)$ l'ensemble des valeurs propres de A appartenant à $\mathbb{R}$ et $\mathrm{Tr}(A)$ sa trace.

1$^{\text{ère}}$ Partie

1. Calculer le rang de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.

2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$; on désigne par f_A l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A. Montrer que
$$\mathrm{rg}(A) = \dim(\mathrm{Im}\, f_A).$$

3. Soient U et V deux éléments non nuls de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$; on note $u_1, \ldots, u_n$ les composantes de U et $v_1, \ldots, v_n$ celles de V. On pose $A = U^tV$.
   (a) Pour tout couple (i,j) d'éléments de $\{1, \ldots, n\}$, exprimer le coefficient $a_{i,j}$ de la matrice A à l'aide des u_k et des v_k.
   (b) Que vaut la trace de A ?
   (c) Exprimer les colonnes $C_1(A), \ldots, C_n(A)$, de A, à l'aide de $v_1, \ldots, v_n$ et U.
   (d) On suppose que $U \neq 0$ et $V \neq 0$; montrer que le rang de A est égal à 1.
4. On considère ici une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang 1.
   (a) Montrer qu'il existe $i_0 \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $C_{i_0}(A) \neq 0$.
   (b) Justifier que pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$, il existe un réel λ_j tel que $C_j(A) = \lambda_j C_{i_0}(A)$.
   (c) En déduire que $A = X^tY$ où $X = C_{i_0}(A)$ et Y est un élément non nuls de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ à préciser.
   (d) On suppose que $A = X_0\ {}^tY_0$; Trouver tous les couples (X_1, Y_1) d'éléments de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tels que $A = X_1\ {}^tY_1$.
5. Expliciter les éléments U et V de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ tels que $A = U^tV$ où A désigne la matrice carrée d'ordre 4 dont tous les coefficients sont égaux à 1.

2$^{\text{ème}}$ Partie

Soit $A = U^tV$ une matrice de rang 1, où U et V sont deux éléments non nuls de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On pose $\alpha = {}^tVU$ et $W = ({}^tVV)U$.

1. Calculer A^2 en fonction du réel α et de A.
2. Soit $k \in \mathbb{N}^*$; calculer A^k en fonction du réel α et de A.
3. À quelle condition nécessaire et suffisante sur α la matrice A est-elle nilpotente ?
4. On suppose que A n'est pas nilpotente ; montrer qu'il existe λ, réel non nul, tel que la matrice λA soit celle d'une projection c'est à dire $(\lambda A)^2 = \lambda A$.
5. (a) Justifier que 0 est valeur propre de A et montrer que le sous-espace propre associé n'est rien d'autre que $\{Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ {}^tVY = 0\}$. Quelle est sa dimension ?
   (b) On suppose que $\alpha \neq 0$; calculer le produit AU et en déduire que α est une autre valeur propre de A. Déterminer le sous-espace propre associé et donner sa dimension.
   (c) Préciser selon les valeurs de α le nombre de valeurs propres de A.
6. Montrer que si $\alpha \neq 0$, alors la matrice A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

   Justifier alors, dans ce cas, que A est semblable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont $0, \ldots, 0, \alpha$ pris dans cet ordre.
7. On suppose que $\alpha = 0$ et on désigne par f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A.
   (a) A est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?
   (b) Montrer que $U \in \operatorname{Ker} f$ et justifier l'existence d'une base de $\operatorname{Ker} f$ de la forme $(E_1, \ldots, E_{n-2}, W)$.
   (c) Montrer que $(E_1, \ldots, E_{n-2}, W, V)$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et écrire la matrice de f dans cette base.
   (d) En déduire que deux matrices de rang 1 et de trace nulle sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Fin
à la prochaine