DL 7 : 2004–2005. Espaces vectoriels Matrices

Enoncé

Le problème est tiré du concours escp-eap 2001, OPTION SCIENTIFIQUE, MATHEMATIQUES I. L'objet du problème est l'étude, dans certains cas, des sous-espaces stables par un endomorphisme d'un espace vectoriel.

Dans tout le problème, on considère un entier naturel n non nul et on note E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^n$. On note 0_E le vecteur nul de E et Id_E l'endomorphisme identité de E. On dira qu'un sous-espace vectoriel F de E est stable par un endomorphisme f de E (ou que f laisse stable F) si l'inclusion $f(F) \subset F$ est vérifiée.

On observera que le sous-espace vectoriel réduit à $\{0_E\}$ et E lui-même sont stables par tout endomorphisme de E.

On note $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et, pour tout entier naturel k, on note $\mathbb{R}_k[X]$ le sous-espace vectoriel formé par les éléments de $\mathbb{R}[X]$ qui sont de degré inférieur ou égal à k.

Si f est un endomorphisme de E on pose

$$f^0 = Id_E,\ f^1 = f,\ f^2 = f \circ f,\ f^3 = f \circ f \circ f,\ etc.$$

Si f est un endomorphisme de E et si $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ est un élément de $\mathbb{R}[X]$, on rappelle qu'on note $P(f)$ l'endomorphisme de E égal à $P(f) = \sum_{k=0}^{n} a_k f^k$.

Préliminaires

Soit f un endomorphisme de E.

1. Soit P un élément de $\mathbb{R}[X]$. Montrer que le sous-espace vectoriel $\operatorname{Ker} P(f)$ est stable par f.
2. (a) Montrer que les droites de E stables par f sont exactement celles qui sont engendrées par un vecteur propre de l'endomorphisme f.

   (b) On note $= (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on considère l'endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base est

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

   Déterminer (en en donnant une base) les droites de $\mathbb{R}^3$ stables par g.

3. Soit p un entier naturel non nul.
4. (a) Si $F_1, \ldots, F_p$ sont p sous-espaces vectoriels de E stables par f, montrer qu'alors la somme $\sum_{k=1}^{p} F_k$ est un sous-espace vectoriel stable par f.

   (b) Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sont p valeurs propres de f et si $n_1, \ldots, n_p$ sont p entiers naturels, montrer qu'alors la somme
   $$\sum_{k=1}^{p} \mathrm{Ker}\,(f - \lambda_{kE})^{n_k}$$
   est stable par f.
5. (a) Soit λ un réel. Vérifier que les sous-espaces vectoriels de E stables par un endomorphisme f sont exactement ceux qui sont stables par l'endomorphisme $f - \lambda_E$.

   (b) Quel lien y-a-t-il entre les sous-espaces vectoriels stables par un endomorphisme f et ceux qui sont stables par l'endomorphisme f^2 ?

   (c) Quel lien y-a-t-il entre les sous-espaces vectoriels stables par un automorphisme f et ceux qui sont stables par l'endomorphisme f^{-1} ?

   (d) Que dire d'un endomorphisme de E laissant stable tout sous-espace vectoriel de E ?

   (e) Donner un exemple d'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ ne laissant stable que le sous-espace vectoriel réduit au vecteur nul et l'espace $\mathbb{R}^2$.
6. (a) On rappelle qu'une forme linéaire sur E est une application linéaire de E dans $\mathbb{R}$ et qu'un hyperplan de E est un sous-espace vectoriel de E de dimension $n-1$.

   Montrer que les hyperplans de E sont exactement les noyaux de formes linéaires non nulles sur E . On pourra compléter une base d'un hyperplan en une base de E.

   (b) Soit φ une forme linéaire non nulle sur E et $H = \mathrm{Ker}\,\varphi$.

   i) Montrer que l'hyperplan H est stable par f si et seulement si il existe un élément λ de $\mathbb{R}$ vérifiant l'égalité :
   $$\varphi \circ f = \lambda \varphi.$$
   ii) On note A la matrice de f relativement à la base canonique de E et L la matrice (ligne) de φ relativement aux bases canoniques de E et $\mathbb{R}$.

   Montrer que l'hyperplan H est stable par f si et seulement si il existe un réel λ vérifiant l'égalité :
   $$Tr(A)Tr(L) = \lambda Tr(L).$$

   (c) Déterminer (en en donnant une base) les plans de $\mathbb{R}^3$ stables par l'endomorphisme g défini à la question 2).

FIN DU SUJET.