

DL 7Bis : Matrices

Le problème est tiré du concours commun marocain–2004, option TSI.

Dans ce problème, \mathbb{K} désigne \mathbb{Q} , \mathbb{R} ou \mathbb{C} , et \mathcal{F} la partie de $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ formée des matrices $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq 3}$ vérifiant

$$a_{1,3} = 0 \quad \text{et} \quad a_{1,2} + a_{2,3} = 0.$$

1. Vérifier que \mathcal{F} est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$.
2. Montrer que si le rang d'une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ est égal à 0 ou 1, alors A est semblable, dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$, à un élément de \mathcal{F} .
3. Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ une matrice de rang 2. On désigne par f l'endomorphisme de \mathbb{K}^3 canoniquement associé à A .
 - (a) Donner les dimensions du noyau $\text{Ker } f$ et de l'image $\text{Im } f$ de f .
 - (b) Montrer que $\text{Ker } f \cup \text{Im } f \subsetneq \mathbb{K}^3$.
 - (c) On suppose que pour tout vecteur $v \in \mathbb{K}^3 \setminus (\text{Ker } f \cup \text{Im } f)$, la famille $(f(v), f^2(v))$ est liée. Écrire la matrice de f dans une base (e_1, e_2, e_3) de \mathbb{K}^3 , choisie telle que $e_2 \in \mathbb{K}^3 \setminus (\text{Ker } f \cup \text{Im } f)$ et $e_3 = f(e_2)$, puis en déduire que A est semblable, dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$, à un élément de \mathcal{F} .
 - (d) Si, au contraire, il existe un vecteur $e \in \mathbb{K}^3 \setminus (\text{Ker } f \cup \text{Im } f)$ tel que la famille $(f(e), f^2(e))$ soit libre. Montrer que la famille $(f^2(e), f(e), -e)$ est une base de \mathbb{K}^3 et en déduire que A est semblable, dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$, à un élément de \mathcal{F} .
4. Soient A , B et C des éléments de $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$.
 - (a) On suppose que les matrices B et C sont semblables dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$. Montrer que, pour tout scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$, les matrices $(B + \lambda I_3)$ et $(C + \lambda I_3)$ sont semblables dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$.
 - (b) On suppose ici que A possède une valeur propre dans \mathbb{K} . Montrer qu'elle est semblable, dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$, à un élément de \mathcal{F} .
5. Ici on prend $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$; soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ une matrice inversible qui n'a pas de valeur propre dans \mathbb{K} . On désigne par f l'endomorphisme de \mathbb{K}^3 canoniquement associé à A . Soit enfin v un vecteur non nul de \mathbb{K}^3 .
 - (a) Montrer que la famille $(v, f(v))$ est libre.
 - (b) Montrer que la famille $(v, f(v), f^2(v))$ est aussi libre. (on pourra raisonner par l'absurde)
 - (c) Construire une base de \mathbb{K}^3 dans laquelle la matrice de f appartient à \mathcal{F} et en déduire que la matrice A est semblable, dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$, à un élément de \mathcal{F} .

6. On considère les matrices

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Caractériser les éléments de l'image de $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ par l'application $X \mapsto XR - RX$.
- (b) En déduire que tout élément A de \mathcal{F} peut s'écrire sous la forme $A = \lambda E + RB - BR$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$ et $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$.
- (c) Montrer, en utilisant les résultats qui précèdent, qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ est de trace nulle si et seulement si elle est de la forme $A = BC - CB$ avec $(B, C) \in (\mathcal{M}_3(\mathbb{K}))^2$.

FIN DE L'ÉPREUVE