بِسمِ اللّهِ الرَّحمَنِ الرَّحِيمِ
وَ عَلَى اللّهِ فَليَتَوَكَّلِ المُتَوَكِّلون

صَدَقَ اللّهُ العَظِيم

DS 6 (07-08) : *Calcul Matriciel*

Mardi 04 Mars 2008

Durée : 3 heures 30 minutes

Conseils pour la rédaction et la présentation des copies.
- **Chaque variable utilisée dans une démonstration doit être définie.**
- **L'énoncé ne doit pas être recopié sur les copies.**
- **Chaque résutat annoncé doit être justifié en citant précisément le théorème du cours avec ses hypothèses exactes utilisé ou en citant le numéro de la question précèdente utilisée.**
- **Les résultats importants doivent être simplifiés et encadrés.**
- **Les calculs doivent être détaillés et expliqués à l'aide de phrases simples.**
- **Laisser une marge à gauche de chaque feuille, en tirant un trait vertical, et un horizontal de la 1ère double feuille pour la note et les remarques du correcteur.**
- **Numéroter les double feuille de la façon suivante : 1/n,2/n,...,n/n où n est le nombre total de doubles feuilles.**
- **Les questions doivent être traités dans l'ordre de l'énoncé.**
- **Tirer deux traits diagonaux pour rayer une partie du raisonnement que vous considérez fausse.**

PROBLÉME

Dans tout le problème, $\mathbb{R}$ désigne le corps des réels et n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Si $p \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices à coefficients réels, à n lignes et p colonnes ; pour toute matrice A de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, ${}^tA$ désigne la matrice transposée de A.

Si $p = n$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est noté simplement $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, c'est l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels ; la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est notée I_n.
Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $C_1(A), \ldots, C_n(A)$ les colonnes de A, ce sont des éléments de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$; par définition, le rang de la matrice A est la dimension du sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ engendré par les vecteurs $C_1(A), \ldots, C_n(A)$. Le rang de A se note rgA, on note aussi $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A)$ l'ensemble des valeurs propres de A appartenant à $\mathbb{R}$ et TrA sa trace.
Si $\alpha_1, \alpha_2, \ldots,$ et α_n sont des réels, on note $\mathrm{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ la matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui admet pour coefficients diagonaux les réels $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ pris dans cet ordre.

1ère Partie

1) **Discuter le rang de la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ selon les valeurs de $a,\ b,\ c$ et d.**
2) **Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.**
   a) **Montrer que $\mathbf{rg}A = 0 \iff$ pour tout couple (i, j) d'éléments de $\{1, \ldots, n\},\ a_{i,j} = 0$. En particulier, si A n'est la matrice nulle alors $\mathbf{rg}A \geq 1$.**
   b) **Montrer que A est inversible si et seulement si $\mathbf{rg}A = n$.**
3) **Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$; on désigne par f_A l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A. Montrer que**
$$\mathbf{rg}A = \dim(\mathbf{Im} f_A).$$
4) **Soient U et V deux éléments non nuls de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$; on note $u_1, \ldots, u_n$ les composantes de U et $v_1, \ldots, v_n$ celles de V. On pose $A = U^tV$.**
   a) **Exprimer les coefficients de la matrice A à l'aide des u_k et des v_k.**
   b) **Que vaut la trace de A ?**
   c) **Exprimer les colonnes de A à l'aide de $v_1, \ldots, v_n$ et U.**
   d) **On suppose que $U \neq 0$ et $V \neq 0$; montrer que le rang de A est égal à 1.**
5) **On considère ici une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang 1.**
   a) **Montrer qu'il existe $i_0 \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $C_{i_0}(A) \neq 0$.**
   b) **Justifier que pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$, il existe un réel λ_j tel que $C_j(A) = \lambda_j C_{i_0}(A)$.**
   c) **En déduire que $A = X^tY$ où $X = C_{i_0}(A)$ et Y est un élément non nuls de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ à préciser.**
   d) **On suppose que $A = X_0\,{}^tY_0$; Trouver tous les couples (X_1, Y_1) d'éléments de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tels que $A = X_1\,{}^tY_1$.**
6) **Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang $r > 0$; montrer que A peut s'écrire comme somme de r matrices de rang 1.**

7) a) **Soient $(Y_1,\dots,Y_p)$ une famille libre de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, et $Z_1,\dots,Z_p$ des vecteurs arbitraires de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Montrer que l'égalité $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} Y_i{}^t Z_i = 0$ a lieu *si et seulement si* les vecteurs $Z_1,\dots,Z_p$ sont tous nuls.**

b) **En déduire que si $(X_1,\dots,X_n)$ et $(Y_1,\dots,Y_n)$ sont deux bases de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ alors la famille $(X_i\,{}^tY_j)_{1\le i,j\le n}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formée de matrices de rang 1.**

2ème Partie

Soit $A = U{}^tV$ une matrice de rang 1, où U et V sont deux éléments non nuls de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On pose $\alpha = {}^tVU$ et $W = ({}^tVV)U$.

1) **Calculer A^2 en fonction du réel α et de A.**

2) **À quelle condition nécessaire et suffisante sur α la matrice A est-elle nilpotente ?**

3) **On suppose que A n'est pas nilpotente ; montrer qu'il existe λ, réel non nul, tel que la matrice λA soit celle d'un projecteur.**

4) a) **Justifier que 0 est valeur propre de A et montrer que le sous-espace propre associé n'est rien d'autre que $\{Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ {}^tVY = 0\}$. Quelle est sa dimension ?**

b) **On suppose que $\alpha \neq 0$; calculer le produit AU et en déduire que α est une autre valeur propre de A. Déterminer le sous-espace propre associé et donner sa dimension.**

c) **Préciser selon les valeurs de α le nombre de valeurs propres de A.**

5) **Montrer que si $\alpha \neq 0$, alors la matrice A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Justifier alors, dans ce cas, que A est semblable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à la matrice $\mathrm{diag}(0,\dots,0,\alpha)$.**

6) **On suppose que $\alpha = 0$ et on désigne par f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A.**

a) **A est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?**

b) **Montrer que $U \in \ker f$ et justifier l'existence d'une base de $\ker f$ de la forme $(E_1,\dots,E_{n-2},W)$.**

c) **Montrer que $(E_1,\dots,E_{n-2},W,V)$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et écrire la matrice de f dans cette base.**

d) **En déduire que deux matrices de rang 1 et de trace nulle sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.**

Fin