بِسمِ اللّهِ الرَّحمَنِ الرَّحِيم
وَ عَلَى اللّهِ فَليَتَوَكَّلِ المُتَوَكِّلُون

صَدَقَ اللّهُ العَظِيم

Corrigé DS6 (07-08) : *Calcul matriciel*

1ère Partie

1) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

- **Si tous les coefficients sont nuls, alors rg**$A = 0$.
- **Sinon, et si les colonnes sont proportionnelles, donc** $a = \lambda b, c = \lambda d$**, donc** $ad - bc = 0$**, alors rg**$A = 1$.
- **Si** $ad - bc \neq 0$**, alors rg**$A = 2$.

2) **a)** **On sait que rg**$A =$ **rg**$(C_1, \cdots, C_n) = \dim$ **Vect**$(C_1, \cdots, C_n)$ **où** $C_1, \cdots, C_n$ **désignent les colonnes de** A**. Si rg**$A = 0$**, alors tous les colonnes sont nulles donc les coefficients** $a_{i,j}$ **sont tous nuls.**

b) **rg**$A = n \iff A$ **surjective (en tant qu'application linéaire)** $\iff A$ **bijective (car endormorphisme en dimension finie)** $\iff A$ **inversible.**

3) **Notons par** $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ **la base canonique de** $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$**, on sait que** $(f_A(e_1) = C_1, \cdots, f_A(e_n) = C_n)$ **est une famille géneratrice de Im**f_A**, d'où** $\dim$ **Im**$f_A = \dim$ **Vect**$(C_1, \cdots, C_n) =$ **rg**A.

4) **a)** $A = U^tV = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 & \cdots & v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1v_1 & \cdots & u_1v_n \\ \vdots & & \vdots \\ u_nv_1 & \cdots & u_nv_n \end{pmatrix}$**, donc** $a_{i,j} = u_iv_j$

b) **Tr**$A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \sum_{i=1}^{n} u_iv_i$.

c) **Les colonnes de** A **sont** $C_1 = v_1U, \cdots, C_n = v_nU$.

d) **les colonnes de** A **ne sont pas toutes nulles donc,** $rgA \geq 1$**, d'autre part elles sont toutes proportionnelles à** U **donc rg**$A = 1$.

5) **a)** **rg**$A \neq 0$**, donc au moins une colonnes** $C_{i_0} \neq 0$.

b) $\dim$ **Vect**$(C_1, \cdots, C_n) =$ **rg**$A = 1$**, donc toutes les colonnes sont proportionnelles.**

c) **Posons** $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$**, on a :** $a_{i,j}$ **est le** i **éme coéfficient de** $C_j = \lambda_j X$**, donc**

$a_{i,j} = \lambda_j x_i$**, d'où** $A = X^tY$ **avec** $Y = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ **non nul.**

d) $A = X_0^tY_0 = X_1^tY_1 \Longrightarrow X_0^tY_0Y_0 = X_1^tY_1Y_0 \Longrightarrow \alpha X_0 = \beta X_1$ **où** $\alpha =^t Y_0Y_0$ **et** $\beta =^t Y_1Y_1$ **des réels non nuls, donc** $X_1 = \lambda X_0$ **et** $Y_1 = \lambda Y_0$**.**

6) $\mathbf{rg}A = r \Longrightarrow A$ **est semblable à la matrice** $J_r = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$**, donc** $\exists P, Q$ **inversible telles que** $A = PJ_rQ$**, or** $J_r = \sum_{i=1}^{r} E_{i,i}$**, avec** $\mathbf{rg}E_{i,i} = 1$**, donc** $A = \sum_{i=1}^{r} PE_{i,i}Q$ **avec** $\mathbf{rg}PE_{i,i}Q = 1$**.**

7) a) **Supposons que** $\sum_{i=1}^{p} Y_i^tZ_i = 0$**, donc** $\sum_{i=1}^{p} Y_i^tZ_iZ_i = 0$**, or la famille** $(Y_1, \cdots, Y_p)$ **est libre et** ${}^tZ_iZ_i = \lambda_i \in \mathbb{R}$**, donc** ${}^tZ_iZ_i = 0$**, posons** $Z_i = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$**, alors** ${}^tZ_iZ_i = \sum_{k=1}^{n} z_k^2 = 0 \Longrightarrow z_1 = \cdots, z_n = 0 \Longrightarrow Z_i = 0$**. La réciproque est evidente.**

b) **La famille** $(X_i \ {}^tY_j)_{1\leq i,j\leq n}$ **est de cardinal** $n^2 = \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ **formé par des matrices de rang 1, d'aprés Partie 1, 4,d). Il suffit donc de montrer qu'elle est libre. En effet supposons que** $\sum_{i,j=1}^{n} \lambda_{i,j}X_i^tY_j = 0$**, donc** $\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_{i,j}X_i \right) {}^tY_j = 0$**, d'après la question précédente on en déduit que** $\sum_{i=1}^{n} \lambda_{i,j}X_i = 0, \ \forall j$ **or la famille** (X_i) **est libre donc** $\lambda_{i,j} = 0, \ \forall i, j$**.**

2ème Partie

1) $A^2 = U^tVU^tV = U\alpha^tV = \alpha U^tV = \alpha A$.

2) A **nilpotente** ***si et seulement si*** $\exists p \in \mathbb{N}^*$ **tel que** $A^p = 0$**, or** $A^p = \alpha^{p-1}A$ **(récurrence simple), la condition necessaire et suffisante pour** A **soit nilpotente est donc** $\alpha = 0$**.**

3) A **n'est pas nilpotente donc** $\alpha \neq 0$**, d'où** $(\lambda A)^2 = \lambda^2A^2 = \lambda^2\alpha A$**. Pour que** λA **soit un projecteur il faut et il suffit que** $(\lambda A)^2 = \lambda A$**, donc** $\lambda = \dfrac{1}{\alpha}$**.**

4) a) $\mathbf{rg}A = 1 \neq n$**, donc** $A = A - 0.I_n$ **n'est pas inversible, d'où 0 est une valeur propre dont le sous-espace propore est** $\ker A$**, avec** $Y \in \ker A \Longleftrightarrow$

$AY = U \underbrace{{}^tVY}_{\textbf{scalaire}} = ({}^tVY)U = 0 \Longleftrightarrow {}^tVY = 0$. **D'après la formule du rang on a** $\dim\ker A = n-1$.

b) $AU = U \underbrace{{}^tVU}_{\textbf{scalaire}} = ({}^tVU)U = \alpha U$, **donc** α **est une autre valeur propre de** A, **dont** U **est un vecteur propre associé. Le sous espace propre associé est** $\ker(A-\alpha I_n)$ **qui forme avec l'autre sous-espace propre à savoir** $\ker A$ **une somme directe dans** $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, **or** $\dim\ker A = n-1, \dim \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = n$, **donc** $\ker(A-\alpha I_n)$ **est de dimension 1, engendré par** U.

c) **Les seules valeurs propres de** A **sont 0,**α. **Il y'en a deux si** $\alpha \neq 0$ **et une seule quand** $\alpha = 0$.

5) **Si** $\alpha \neq 0$ **les sous-espaces propres de** A **sont supplementaires dans** $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, **donc** A **est diagonalisable et donc semblable à la matrice** $diag(0,\cdots,0,\alpha)$ **car** $\dim\ker A = n-1$ **et** $\dim\ker(A-\alpha I_n) = 1$.

6) a) A **n'est pas diagonalisable, car elle est non nulle et admet 0 comme unique valeur propre.**

b) **on a d'aprés Partie II, 4,b)** $AU = \alpha U = 0$, **donc** $U \in \ker f$, **donc** $W = \lambda U \in \ker f$, **qu'on complète par** $(E_1,\cdots,E_{n-2})$ **pour avoir** $(E_1,\cdots,E_{n-2},W)$ **base de** $\ker f$ **.**

c) **card**$\mathcal{B}$ **où** $\mathcal{B} = \{E_1,\cdots,E_{n-2},U,V\} = n = \dim\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, **il suffit donc de montrer qu'elle est libre, en effet supposons que** $\lambda_1E_1+\cdots+\lambda_{n-2}E_{n-2}+\lambda_{n-1}W+\lambda_nV = 0$, **on multiplie par** A **à gauche vu** $E_1,\cdots,E_{n-2},W \in \ker f = \ker A$, **donc** $0 = \lambda_nAV = \lambda U \underbrace{{}^tVV}_{\textbf{scalaire non nul}}$, **or** $W \neq 0$, **donc** $\lambda_n = 0$, **d'où** $\lambda_1E_1+\cdots+\lambda_{n-2}E_{n-2}+\lambda_{n-1}W = 0$, **or la famille** $(E_1,\cdots,E_{n-2},W)$ **est libre car base de** $\ker f$, **donc** $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$.
on a $f(E_1) = \cdots = f(E_{n-1}) = f(W) = 0$ **car** $(E_1,\cdots,E_{n-2},W)$ **base de** $\ker f$, **d'autre part** $f(V) = AV = {}^tVVU = W$, **donc** $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = J$
qui est semblable à $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_0}(f)$, **où** $\mathcal{B}_0$ **la base canonique de** $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

d) **D'aprés la question précédente toute matrice de rang 1 est de trace nulle est semblable à** J, **dont toutes ces matrices sont semblables entre elles.**

Fin