CPGE My Youssef, Rabat

بِسمِ اللَّهِ الرَّحمَنِ الرَّحِيمِ
وَ قُلِ إِعمَلُوا فَسَيَرَى اللَّهُ عَمَلَكُم وَ رَسُولُهُ وَ
المُؤ مِنُون

صَدَقَ اللَّهُ العَظِيم

Corrigé DS 9: *Matrices Déterminants*

Lundi 15 Juin 2009
Durée : 4 heures

Blague du jour :
Docteur, j'ai des trous de memoire, que dois-je faire ?
- Me payer d'avance, madame !

Mathématicien du jour — ***Van Der Monde***
Alexandre-Théophile Vandermonde (1735-1796), est un mathématicien français. Il fut aussi musicien et chimiste, travaillant notamment avec Étienne Bézout et Antoine Lavoisier. Son nom est maintenant surtout associé à un déterminant.

I. Résultats préliminaires

1) A **est une matrice triangulaire dont les valeurs propres sont ses termes diagonaux, càd 1 et 2, ainsi** A **qui est une matrice carré d'ordre 2, admet 2 valeurs propres distinctes, donc diagonalisable, et par suite semblable à** $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

2) Soit P, Q **inversibles telles que** $B = PAP^{-1}$ **et** $C = QBQ^{-1}$**, alors** $C = QPAQ^{-1}P^{-1} = QPA(QP)^{-1}$**, donc** A **et** C **sont semblables.**

3) Trace d'une matrice : Posons $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ **et** $B = \begin{pmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{pmatrix}$

a) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$**, on a** $A+\lambda B = \begin{pmatrix} a+\lambda a' & c+\lambda c' \\ b+\lambda b' & d+\lambda d' \end{pmatrix}$**, d'où** $\mathrm{tr}(A+\lambda B) = a+\lambda a'+d+\lambda d' = \mathrm{tr}(A)+\lambda \mathrm{tr}(B)$**.**

b) $AB = \begin{pmatrix} aa'+cb' & ac'+cd' \\ ba'+db' & bc'+dd' \end{pmatrix}$ **et** $BA = \begin{pmatrix} a'a+c'b & a'c+c'd \\ b'a+d'b & b'c+d'd \end{pmatrix}$ **donc** $\mathrm{tr}(AB) = aa'+cb'+bc'+dd' = \mathrm{tr}(BA)$**.**

c) Soit P, Q **inversible telle que** $B = PAP^{-1}$**, donc** $\mathrm{tr}(B) = \mathrm{tr}(PAP^{-1}) = \mathrm{tr}(P^{-1}AP) = \mathrm{tr}(A)$**.**

4) Déterminant d'une matrice :

a) Posons $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ **et** $B = \begin{pmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{pmatrix}$**, donc** $AB = \begin{pmatrix} aa'+cb' & ac'+cd' \\ ba'+db' & bc'+dd' \end{pmatrix}$**, d'où** $\det(AB) = (aa'+cb')(bc'+dd')-(ac'+cd')(ba'+db') = aa'dd'+cb'bc'-ac'db'-cd'ba' = (ad-bc)(a'd'-b'c') = \det(A)\det(B)$**.**

b) **Si A inversible, soit $B = A^{-1}$, alors $AB = I_2$, d'où $1 = \det(I_2) = \det(AB) = \det(A)\det(B)$, donc $\det(A) \neq 0$.**

Inversement : Si $\det(A) \neq 0$, posons $B = \dfrac{1}{\det(A)}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$, on vérifie facilement que $AB = BA = I_2$, donc A est inversible, avec $A^{-1} = B = \dfrac{1}{\det(A)}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

5) **Polynôme caractéristique d'une matrice :**

a) $\chi_A(x) = \det(A - xI_2) = \begin{vmatrix} a-x & b \\ c & d-x \end{vmatrix} = (a-x)(d-x) - bc = x^2 - (a+d)x + ad - bc = x^2 - \mathrm{tr}(A)x + \det(A)$.

b) **λ est une valeur propre de A si et seulement si $A - \lambda I_2$ est non inversible si et seulement si $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = 0$.**

c) **$\mathrm{Sp}(A) \neq \emptyset$ si et seulement si l'équation $x^2 - \mathrm{tr}(A)x + \det(A) = 0$ admet au moins une racine réelle si et seulement si $\Delta = \mathrm{tr}(A)^2 - 4\det(A) \geq 0$.**

d) **Soit P inversible telle que $B = PAP^{-1}$, donc $\chi_B(x) = \det(B - xI_2) = \det(PAP^{-1} - xI_2) = \det(P(A - xI_2)P^{-1}) = \det(A - xI_2) = \chi_A(x)$.**

La réciproque : Posons $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, on a $\chi_A(x) = (1-x)^2 = \chi_{I_2}(x)$, mais A n'est pas semblable à I_2 car sinon $A = PI_2P^{-1} = I_2$.

e) $A^2 - \mathrm{tr}(A)A + \det(A)I_2 = \begin{pmatrix} a^2+bc & b(b+d) \\ c(a+d) & bc+d^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a(a+d) & b(a+d) \\ c(a+d) & d(c+d) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

6) a) **Découle de l'unicité des limites des suites a_k, b_k, c_k et d_k.**

b) $\lim \mathrm{tr}(A_k) = \lim(a_k + d_k) = \lim a_k + \lim d_k = a + d = \mathrm{tr}(A)$, **de même** $\lim \det(A_k) = \lim(a_k d_k - b_k c_k) = ad - bc = \det(A)$.

II. Réduction des matrices carrées réelles d'ordre 2

1) **Si $\mathrm{Sp}(A) = \{\lambda\}$ et A diagonalisable, alors $\exists P$ inversible telle que $A = PDP^{-1}$, où $D = \lambda I_2$, donc $A = \lambda I_2$. La réciproque est vraie, car λI_2 est diagonalisable puisque diagonale.**

2) a) **Car $f(e_1') = \lambda e_1'$, alors que $f(e_2') = \alpha e_1' + \beta f(e_2')$.**

b) **A et $\begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ sont les matrices d'un même endomorphisme, donc sont semblables et par suit ont même polynôme caractéristique, donc même valeurs propres. Ainsi β qui est une valeur propre de $\begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ est aussi valeur propre de A, mais $\mathrm{Sp}(A) = \{\lambda\}$ donc $\beta = \lambda$, avec $\alpha \neq 0$ car sinon A serait semblable $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$, donc diagonalisable.**

c) $\begin{pmatrix} 1/\alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$**, donc $\begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ est semblable à $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ car $\begin{pmatrix} 1/\alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$, or A est semblable à $\begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ car matrices d'un même endomorphisme dans deux bases diffèrentes. Donc finalement A est semblable à $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$.**

3) a) **On a $f(e_1') = \lambda e_1'$ et $f(e_2') = \mu e_2'$, donc la matrice de f dans la base (e_1', e_2') sera de la forme $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$.**

b) **A est semblable à $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ car elles représentent le même endomorphisme dans deux bases diffèrentes.**

4) a) **$\mathrm{Sp}(A) = \emptyset$, donc l'équation $x^2 - \mathrm{tr}(A)x + \det(A) = 0$ n'admet aucune racine réelle, donc $\Delta = \mathrm{tr}(A)^2 - 4\det(A) < 0$.**

b) $A'^2 = \dfrac{4}{\delta^2}\left(A^2 - \mathrm{tr}(A)A + \frac{\mathrm{tr}(A)^2}{4}I_2\right) = \dfrac{4}{4\det(A) - \mathrm{tr}(A)^2}\left(\frac{\mathrm{tr}(A)^2}{4} - \det A\right)I_2 = -I_2$ **(d'aprés I.5.e).**

c) **card**$\{e, g(e)\} = 2 = \dim \mathbb{R}^2$, **il suffir de montrer que** $\{e, g(e)\}$ **est libre. En effet,** $\alpha e + \beta g(e) = 0 \Longrightarrow \alpha g(e) + \beta g^2(e) = 0$, **or** $A'^2 = -I_2$, **donc** $g^2 = -id_{\mathbb{R}^2}$, **d'où** $-\beta e + \alpha g(e) = 0$, **donc** $\alpha(\alpha e + \beta g(e)) - \beta(-\beta e + \alpha g(e)) = (\alpha^2 + \beta^2)e = 0$, **or** $e \neq 0$, **donc** $\alpha^2 + \beta^2 = 0$, **d'où** $\alpha = \beta = 0$ **(CQFD).**

d) **Posons** $(e, g(e)) = (e_1, e_2)$, **donc** $g(e_1) = e_2$ **et** $g(e_2) = g^2(e) = -e = -e_1$, **donc la matrice de** g **dans la base** $(e, g(e)) = (e_1, e_2)$ **est de la forme** $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

e) A' **et** A_1 **représentent le même endomorphisme** g **dans deux bases différentes, donc sont semblables, i.e :** $\exists P$ **inversible telle que** $A_1 = PA'P^{-1}$. **D'autre part on remarque que** $A'' = \frac{1}{2}(\mathrm{tr}(A)I_2 + \delta A_1)$, **donc** $A'' = \frac{1}{2}P\left(\mathrm{tr}(A)I_2 + \delta A'\right)P^{-1} = PAP^{-1}$, **donc** A **et** A'' **sont semblables.**

III. Ètude des classes de similitude de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

A. Cas des matrices scalaires.

1) A **semblable à** $\lambda I_2 \Longleftrightarrow \exists P$ **inversible telle que** $A = P(\lambda I_2)P = \lambda I_2$, **donc la classe de similitude d'une matrice scalaire** λI_2 **est réduite au singleton** $\{\lambda I_2\}$.

2) **a)** $\det E_\lambda = \det F_\lambda = 1$, **donc** E_λ **et** F_λ **sont inversibles d'inverses** $E_\lambda^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ **et** $F_\lambda^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\lambda & 1 \end{pmatrix}$

b) $E_\lambda A E_\lambda^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -\lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+\lambda c & b+\lambda d \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -\lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+\lambda c & b+\lambda(d-a)+\lambda^2 c \\ c & -c\lambda + d \end{pmatrix}$

$F_\lambda A F_\lambda^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\lambda & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ \lambda a + c & \lambda b + d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\lambda & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - \lambda b & b \\ \lambda^2 a + \lambda(a-d) + c & -c\lambda + d \end{pmatrix}$

3) **On a en particulier,** $E_\lambda A E_\lambda^{-1} = A$ **et** $F_\lambda A F_\lambda^{-1} = A$, **donc par identification des coéfficients, on obtient** $a + \lambda c = a,\ \forall \lambda$, **donc** $c = 0$, **mais aussi** $\lambda(d-a) + b = b,\ \forall\lambda$, **donc** $a = d$, **et enfin** $a - b\lambda = a, \forall\lambda$, **donc** $b = 0$, **i.e :** $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = aI_2$, **matrice scalaire.**

B. Pour qu'une classe de similitude soit fermée

1) **Si** A **matrice scalaire, alors sa classe de similitude est** $\mathcal{S}(A) = \{A\}$, **donc toute suite** (A_k) **d'éléments de** $\mathcal{S}(A)$ **est constante** $A_k = A$, **et donc converge vers** $A \in \mathcal{S}(A)$.

2) **a)** A_k **est semblable à** $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, **qui est, à son tour, semblable à** A, **d'après II.2.c, donc** A_k **et** A **sont semblables.**

b) $A_k = \begin{pmatrix} 2^{-k} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda 2^{-k} & 2^{-k} \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 2^{-k} \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ **qui converge vers** $B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda I_2$.

c) A **et** B **ne peuvent pas être semblables car** B **diagonale et** A **non diagonalisable, donc** $B \notin \mathcal{S}(A)$, **or** $B = \lim A_k$ **et** $A_k \in \mathcal{S}(A)$, **donc** $\mathcal{S}(A)$ **n'est pas fermée.**

3) **a)** $P_k A p_k^{-1} = \begin{pmatrix} a_k & b_k \\ c_k & d_k \end{pmatrix}$ **converge vers** $C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, **donc** $\lim a_k = a, \lim b_k = b, \lim c_k = c$ **et** $\lim d_k = d$, **d'autre part** $P_k(A - xI_2)P_k^{-1} = P_k A p_k^{-1} - xI_2 = \begin{pmatrix} a_k - x & b_k \\ c_k & d_k - x \end{pmatrix}$ **converge vers** $\begin{pmatrix} a - x & b \\ c & d - x \end{pmatrix} = C - xI_2$.

b) **D'après I.6.b, on a :** $\det(C - xI_2) = \lim \det(P_k(A - xI_2)P_k^{-1}) = \lim \det(A - xI_2) = 0$ **car** $x \in \{\lambda, \mu\} = \mathbf{Sp}(A)$.

c) **D'après la question précèdente, on peut conclure que Sp**$(C) = \{\lambda, \mu\}$**, donc (d'après II.3.b)** C **est semblable à** $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$**, d'après encore II.3.b, on a aussi** A **est semblable à** $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$**, d'où** A **et** C **sont semblables, i.e :** $C \in \mathcal{S}(A)$**.**

d) **On vient de démontrer que si Sp**$(A) = \{\lambda, \mu\}$**, alors pour toute suite** $A_k = P_k(A - xI_2)P_k^{-1}$ **qui converge vers** C**, on a** $C \in \mathcal{S}(A)$**, donc** $\mathcal{S}(A)$ **est fermée.**

4) a) **D'après I.6.b, on a** $\mathrm{tr}(\tilde{A}) = \lim \mathrm{tr}(P_k A P_k^{-1}) = \lim \mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(A)$**. De la même question on montre aussi que** $\det(\tilde{A}) = \det(A)$**.**

b) **D'après la question II.4.d, et comme** $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(\tilde{A})$ **et** $\det(A) = \det(\tilde{A})$**, on en déduit que les deux matrices** A **et** $\tilde{A}$ **sont semblables à la matrice** A''**, donc** A **et** $\tilde{A}$ **sont semblables.**

c) **On a montré que pour toute suite de matrices** $P_k A P_k^{-1} \in \mathcal{S}(A)$ **qui converge vers une matrice** $\tilde{A}$**, on a** $\tilde{A} \in \mathcal{S}(A)$**, donc** $\mathcal{S}(A)$ **est fermée.**

5) **Les cas possibles pour une matrice** $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$**, sont les suivantes :**

– **Sp**$(A) = \emptyset$**, dans ce cas** $\mathcal{S}(A)$ **est fermée, d'après III.B.4.c.**
– **Sp**$(A) = \{\lambda\}$ **diagonalisable, dans ce cas** $A = \lambda I_2$ **(d'après II.1), et donc** $\mathcal{S}(A)$ **est fermée d'après III.B.1.**
– **Sp**$(A) = \{\lambda\}$ **non diagonalisable, dans ce cas** $\mathcal{S}(A)$ **n'est pas fermée d'après III.B.2.c.**
– **Sp**$(A) = \{\lambda\}$ **diagonalisable, dans ce cas** $A = \lambda I_2$ **(d'après II.1), et donc** $\mathcal{S}(A)$ **est fermée d'après III.B.1.**
– **Sp**$(A) = \{\lambda, \mu\}$ **dans ce cas** A **est diagonalisable (d'après II.3.b) et** $\mathcal{S}(A)$ **fermée d'après III.B.3.d.**

Conclusion : $\mathcal{S}(A)$ **est fermée si et seulement si Sp**$(A) = \emptyset$ **ou** A **diagonalisable.**

Fin
à la prochaine