DL 6 : *Polynômes*

A rendre Jeudi le 04 Mars 2004

Préambule : $\mathbb{R}[X]$ désigne l'ensemble des polynômes à une indéterminée sur le corps des réels. Nous attribuerons au polynôme nul le degré $-\infty$. Soit f une fonction réelle d'une variable réelle de classe C^{∞}. On choisit $n+1$ réels $a_0, a_1, \ldots, a_n$ tels que $a_0 < a_1 < \ldots < a_n$ et $n+1$ entiers naturels $k_0, k_1, \ldots, k_n$. On suppose connues les valeurs $f(a_i), f'(a_i), \ldots, f^{(k_i)}(a_i)$ de f et de ses dérivées successives en a_i pour tout $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$. On note $N = \left(\sum\limits_{i=0}^{n} k_i\right) + n$.
On cherche le polynôme d'interpolation $P \in \mathbb{R}[X]$ de f tel que :

$$deg(P) = N \text{ et } \forall i \in \{0, 1, \ldots, n\}, \quad \forall j \in \{0, 1, ..., k_i\}, \quad P^{(j)}(a_i) = f^{(j)}(a_i).$$

Partie I : Existence et unicité de P.

$\mathbb{R}_N[X]$ désigne l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré au plus N. On considère l'application φ de $\mathbb{R}_N[X]$ dans $\mathbb{R}^{N+1}$ telle que, pour tout Q de $\mathbb{R}_N[X]$:
$\varphi(Q) = \big(Q(a_0), \ldots, Q^{(k_0)}(a_0), Q(a_1), \ldots, Q^{(k_1)}(a_1), \ldots, Q(a_n), \ldots, Q^{(k_n)}(a_n)\big)$

1°) Montrer que cette application φ est un isomorphisme d'espace vectoriel.

2°) En déduire l'existence et l'unicité du polynôme P défini dans le préambule.

Partie II : Détermination de P.

1°) Montrer qu'il existe des polynômes $P_0, P_1, \ldots, P_{n+1}$ et $R_0, R_1, \ldots, R_n$ de $\mathbb{R}[X]$ tels que :

$$P_0 = P$$

et

$$\forall i \in \{0, ..., n\}, \quad P_i = (X - a_i)^{k_i+1} P_{i+1} + R_i \text{ avec } deg(R_i) = k_i.$$

2°) Montrer que P_{n+1} est le polynôme nul.

3°) Comparer $P_i^{(j)}(a_i)$ et $R_i^{(j)}(a_i)$ pour tout $j \in \{0, 1, ...k_i\}$.

4°) **a)** Montrer que, pour tout $i \in \{0, 1, ..., n\}$, on peut écrire $R_i = \sum\limits_{k=0}^{k_i} a_{ik}(X - a_i)^k$ où les a_{ik} sont des coefficients réels.

b) Calculer les coefficients a_{ik} à l'aide des valeurs de P_i et de ses dérivées en a_i.

5°) Exprimer le polynôme P à l'aide des polynômes R_i et des polynômes $(X - a_i)$. Que retrouve-t-on lorsqu'on choisit $n = 0$?

FIN