DS 5 : Polynômes

Durée : 3 heures

0.1. Problème Polynômes

0.1.1. Préambule:

Dans tout le problème $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ continue et $n \in \mathbb{N}^*$. $(r_k)_{1\leq k\leq n}$ famille de n réels de $[-1, 1]$ deux à deux distincts.
On dit qu'un polynôme P interpolle f aux points $(r_k)_{1\leq k\leq n}$ si et seulement si $P(r_k) = f(r_k) \quad \forall k \in [|1, n|]$.

0.1.2. Polynômes d'interpolation de Lagrange:

Pour tout $i \in [|1, n|]$, on pose : $L_i(X) = \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \frac{X - r_j}{r_i - r_j}$.

1. (0.75 pts) Donner le degré de chaque polynôme, L_i, ses racines ainsi que son coefficient dominant.
2. (0.75 pts) Montrer que :
$$\begin{aligned} L_i(r_k) &= 0 \quad \text{si } i \neq k \\ &= 1 \quad \text{si } i = k \end{aligned}$$
3. (1.25 pts) En déduire que $P(X) = \sum_{i=1}^{n} f(r_i)L_i(X)$ est l'unique polynôme de degré $\leq n - 1$ qui interpole f aux points $(r_k)_{1\leq k\leq n}$.

0.1.3. Polynômes de tchebechev:

Dans la suite on pose : $T_n(X) = \cos(n\arccos(X))$. *Polynômes de tchebechev* :

1. (0.75 pts) Montrer que $T_{n+1}(X) = 2XT_n(X) - T_{n-1}(X)$.
Indication : On pourra utiliser la relation : $\cos a + \cos b = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$.
2. (1.5 pts) En déduire que T_n est un polynôme, on l'appelle n-ème *polynômes de tchebychev*. Montrer que son degré est n et que son coefficient dominant vaut $\frac{1}{2^{n-1}}$ si $n \geq 1$.
3. (1 pt) Montrer que $T_n(\cos(t)) = \cos(nt)$ pour tout réel t, en dé duire les racines de T_n.
4. (0.75 pts) Montrer $\sup_{x\in[-1,1]} |T_n(x)| = 1$.

0.1.4. Recherche des points réalisant la meilleure interpolation:

On se propose dans cette partie de déterminer les points $(r_i)_{1\leq i\leq n}$ pour lesquels l'interpolation est meilleure, c'est à dire pour les quels $\sup_{x\in[-1,1]} |P(x) - f(x)|$ est minimal, où P est l'unique polynôme de degré $n - 1$ qui interpole f aux points $(r_i)_{1\leq i\leq n}$.

1. (0.75 pts) Soit $x \in [-1,1]$ différent de tous les $(r_i)_{1\leq i\leq n}$, et $A = \frac{f(x)-P(x)}{\prod_{i=1}^{n}(x-r_i)}$,

   montrer que la fonction, g, definie sur $[-1,1]$ par : $g(t) = f(t) - P(t) - A\prod_{i=1}^{n}(t-r_i)$ s'annule $n+1$ fois sur $[-1,1]$.
2. (1.25 pts) En déduire que g' s'annule au moins n fois sur $[-1,1]$, puis que $g^{(n)}$ s'annule au moins une fois sur $[-1,1]$.
3. (0.5 pts) Si $\deg Q = n$, que vaut $Q^{(n)}$.
4. (1.5 pts) En déduire que $\exists c_x \in [-1,1]$ tel que : $A = \frac{f^{(n)}(c_x)}{n!}$.
5. (0.5 pts) En déduire que : $\sup_{x\in[-1,1]} |P(x) - f(x)| \leq \frac{M}{n!}\sup_{t\in[-1,1]}\prod_{i=1}^{n}|t-r_i|$ avec $M = \sup_{t\in[-1,1]}\left|f^{(n)}(t)\right|$.
   Remarque utile pour comprendre la suite du problème : Ainsi pour que $\sup_{x\in[-1,1]}|P(x)-f(x)|$ *soit minimal il sufit que* $\sup_{x\in[-1,1]}\prod_{i=1}^{n}|x-r_i|$ *le soit, on cherchera dorénavant à trouver les* r_i *pour les quels* $\prod_{i=1}^{n}|x-r_i|$ *est minimal, c'est à dire encore à chercher les polynômes* Q *unitaires de degré* n *pour les quels* $\sup_{x\in[-1,1]}|Q(x)|$ *est minimal, et dont les* r_i *sont les racines distinctes.*
6. (0.5 pts) Montrer que ce sup vaut $\frac{1}{2^{n-1}}$ lorsque les r_k sont les racines du n-ème *polynômes de tchebychev*.
7. Soit le cas général $Q(X) = \prod_{i=1}^{n}|X-r_i|$. Supposons que : $\sup_{x\in[-1,1]}|Q(x)| < \frac{1}{2^{n-1}}$.
   (a) (1 pt) Montrer que : $Q - \frac{T_n}{2^{n-1}}$ est un polynôme de degré inférieur à $n-1$.
   (b) (0.75 pts) Montrer que $\left(Q - \frac{T_n}{2^{n-1}}\right)\left(\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right)$ est de signe opposé que celui de $(-1)^k \quad \forall 0 \leq k \leq n$.
   Indication : On pourra utiliser le fait que : $\cos k\pi = (-1)^k$.
   (c) (1.25 pts) En deduire que $Q - \frac{T_n}{2^{n-1}}$ admet au moins n racines.
   (d) (0.75 pts) En déduire une contradiction.
8. (0.75 pts) Conclure que les points $(r_k)_{1\leq k\leq n}$ réalisant la meilleure interpolation sont exactement les racine du n-ème *polynômes de tchebychev*.

0.2. Exercice Fractions rationnelles:*(2 pts)*

Donner la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle suivante, on cherchera d'abord à déterminer sa partie entière, ses pôles ainsi que leurs multiplicités.

$$F := \frac{1}{4}\,\frac{-5\,X^5 + 14\,X^4 - 9\,X^3 - 20\,X^2 + 8 + 4\,X^7}{(X-1)^2\,X^2\,(X+1)^2}$$

FIN.