DS 5 : Polynômes

Corrigé

0.1. PARTIE A :Etude d'un endomorphisme.

A.l. Il est simple de vérifier que $\Delta(P+\lambda Q)=\Delta(P)+\lambda\Delta(Q)$, donc Δ est linéaire, de plus $\Delta(P)$ est un polynôme $\forall P\in E$, donc Δ est un endomorphisme de E et pour tout n entier naturel, si $P\in E_n$, alors $\deg P(X)\le n, \deg P(X+1)=\deg P(X)\le n$ et $\mathrm{co}P(X+1)=\mathrm{co}P(X)$, d'où $\deg(\Delta P(X))=\deg(P(X+1)-P(X))\le\deg(P)-1\le n$, donc $\Delta P(X)\in E_n \quad \forall P\in E_n$ et ainsi Δ induit un endomorphisme sur E_n.

A.2. $\Delta(1)=0,\Delta(X)=1,\Delta(X^2)=(X+1)^2-X^2=1+2X,\Delta(X^3)=(X+1)^3-X^3=1+3X+3X^2$.

La matrice sera alors $A=\begin{pmatrix}0&1&1&1\\0&0&2&3\\0&0&0&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}$, ainsi $\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}\in A\Leftrightarrow y=z=t=0$, ainsi $\dim A=1$ et alors $\mathrm{rg}(A)=4-1=3$ une base de A sera donc formée par une famille libre de 3 colonnes de A, qui n'est autre que la famille formée par les 2ème, 3ème et 4 ème colonne de A.

A.3.

A.3.a. $P\in\mathrm{Ker}\,(\Delta_n)\Leftrightarrow P(X+1)=P(X)$, ainsi en posant $Q(X)=P(X)-P(0)$, alors Q admet une infinité de racines 0,1,2,..., donc nul, et par suite $P(X)=P(0)$, d'où $P\in E_0$. Ainsi $\dim\Delta_n=1$, d'où d'aprés la formule du rang $\dim\Delta_n(E_n)=\dim\mathrm{Im}\,\Delta_n=\dim E_n-\dim\Delta_n=n-1=\dim E_{n-1}$, or d'aprés ce qui précède on a vu que $\Delta_n(E_n)\subset E_{n-1}$, d'où égalité.

A.3.b. *Existence* : Pour tout polynôme Q de E_{n-1}, on $Q\in E_{n-1}=\Delta_n(E_n)$, d'où $\exists P_0\in E_n$ tel que : $\Delta_n(P_0)=Q$, d'autre part $\forall\lambda\in\mathbb{K}$, on a : $\Delta_n(P_0+\lambda)=\Delta_n(P_0)+\Delta_n(\lambda)=\Delta_n(P_0)=Q$ il suffit donc de choisir la constante $\lambda=-\int_0^1 P_0(x)dx$ de sorte que $\int_0^1 P(x)dx=0$ où $P=P_0+\lambda$.

Unicité : Soient P_1,P_2 deux polynômes tels que : $\begin{cases}\Delta_n(P_1)=\Delta_n(P_2)=Q\\ \int_0^1 P_1(x)dx=\int_0^1 P_2(x)dx=0\end{cases}$,
alors $\Delta_n(P_1-P_2)=\Delta_n(P_1)-\Delta_n(P_2)=0$, d'où $P_1-P_2=\lambda$,
d'où $\lambda=\int_0^1\lambda dx=\int_0^1(P_1(x)-P_2(x))dx=\int_0^1 P_1(x)dx-\int_0^1 P_2(x)dx=0$, d'où $P_1=P_2$.

0.2. PARTIE B : Etude d'une famille de polynômes.

B.l. $\deg(B_1)=1$, donc $B_1(X)=aX+b$, $\Delta(B_1)=B_0=1\implies a=1$, de plus $\int_0^1 B_1(x)dx=0\implies \frac{a}{2}+b=0$, d'où $B_1(X)=X-\frac{1}{2}$, de même à l'aide des formules $\Delta(B_2)=2B_1$ et $\int_0^1 B_2(x)dx=0$, on trouve que : $B_2(X)=X^2-X-\frac{1}{6}$.

B.2. Posons $p=\mathrm{degB_n}$, donc $B_n(X)=a_pX^p+\ldots+a_0$, dans ce $B_n(X+1)=a_p(X+1)^p+\ldots+a_0=a_pX^p+(pa_p+a_{p-1})X^{p-1}+\ldots+a_0$, donc $\Delta(B_n)=pa_pX^{p-1}+\ldots=nX^{n-1}$, d'où $p=n, a_p=1$, ainsi le degré de B_n est n, et son coefficient dominant est 1.

B.3.a. $\forall n\ge 2$, on a : $B_n(1)-B_n(0)=\Delta B_n(0)=0$ car $\Delta_n(B_n)=nX^{n-1}$.

B.3.b. On a : $B_n(X+1)-B_n(X)=nX^{n-1}$, aprés dérivation on obtient $\frac{B_n'}{n}(X+1)-\frac{B_n'}{n}(X)=(n-1)X^{n-2}$, de plus $\int_0^1\frac{B_n'}{n}(x)dx=\frac{B_n(1)-B_n(0)}{n}=0$, ainsi $\frac{B_n'}{n}$ vérifie la même propriété que B_{n-1}, l'unicité permet d'affirmer que $\frac{B_n'}{n}=B_{n-1}$.

B.3.c. On a : $\Delta(S_n)(x)=S_n(X+1)-S_n(X)=(-1)^n(B_n(-X)-B_n(l-X))=-(-1)^n\Delta B_n(-X)=(-1)^{n+1}\Delta(B_n)(-X)$. or $\Delta(B_n)(X)=nX^{n-1}$, d'où $\Delta(S_n)(x)=(-1)^{n+1}\Delta(B_n)(-X)=(-1)^{n+1}n(-X)^{n-1}=$

$nX^{n-1} = \Delta(B_n)(X)$, ainsi $\Delta(B_n(X) - S_n(X)) = 0$, d'où $B_n(X) - S_n(X) = \lambda$, en intégrant cette egalité entre 0 et 1 on trouve $\lambda = 0$, car $\int_0^1 S_n(x)dx = (-1)^n \int_0^1 B_n(1-x)dx = (-1)^n \int_0^1 B_n(u)du = 0$, d'où l'égalité : $B_n(x) = (-l)^n B_n(1-x)$.
Ainsi $B_{2k+1}(0) = -B_{2k+1}(0)$, or $B_{2k+1}(0) = B_{2k+1}(0)$ d'aprés B.3.a, d'où $B_{2k+1}(0) = B_{2k+1}(0) = 0$ et de même $B_{2k+1}(\frac{1}{2}) = -B_{2k+1}(\frac{1}{2})$, d'où $B_{2k+1}(\frac{1}{2}) = B_{2k+1}(\frac{1}{2}) = 0$.
B.3.d. Posons $C_n(x) = 2^{n-1}\left(B_n(\frac{x}{2}) + B_n(\frac{x+1}{2})\right)$, on a alors $\Delta C_n(X) = C_n(X+1) - C_n(X) = 2^{n-1}\left(B_n(\frac{X}{2}+1) + B_n(\frac{X}{2}) - B_n(\frac{X}{2}) - B_n(\frac{X+1}{2}\right) = 2^{n-1}\left(B_n(\frac{X}{2}+1) - B_n(\frac{X}{2})\right) = 2^{n-1}\Delta B_n(\frac{X}{2}) = 2^{n-1}n(\frac{X}{2})^{n-1} = nX^{n-1} = \Delta B_n(X)$, d'où $C_n(X) - B_n(X) = \lambda$, d'autre part $\int_0^1 C_n(x)dx = 2^{n-1}\left(\int_0^1 B_n(\frac{x}{2})dx + \int_0^1 B_n(\frac{x+1}{2}dx\right) = 2^n(\int_0^{\frac{1}{2}} B_n(u)du + \int_{\frac{1}{2}}^1 B_n(u)du) = 2^n \int_0^1 B_n(u)du = 0$, on a posé $u = \frac{x}{2}$, comme changement de variable dans la 1ére intégrale et $u = \frac{x+1}{2}$ dans la deuxième, doù $\lambda = \int_0^1 \lambda dx = \int_0^1 C_n(x)dx - \int_0^1 B_n(x))dx = \int_0^1 (C_n(x) - B_n(x))dx = 0$, d'où $C_n(x) = B_n(x)$.
En prenant $x = 0$ dans l'égalité : $B_n(x) = 2^{n-1}\left(B_n(\frac{x}{2}) + B_n(\frac{x+1}{2})\right)$, on trouve que : $B_{2k}(\frac{1}{2}) = (-1 + 2^{1-2k})B_{2k}(0)$.
B.4.a. D'aprés B.3.c B_3 a comme racines : 0, $\frac{1}{2}$ et 1, or il est de degré 3, donc ne peut pas en avoir d'autres, en particulier il ne s'annule pas sur $]0, \frac{1}{2}[$.
D'aprés la formule précédente pour $k = 2$, on a : $B_4(0) = -B_4(\frac{1}{2})$, donc B_4 s'annule au moins une fois sur $]0, \frac{1}{2}[$. D'autre part on a le tableau de variation global suivant :

x	0	α	$\frac{1}{2}$
B_3	$+$	$+$	$+$
$B_4' = 3B_3$	$+$	$+$	$+$
B_4	$-$	$\nearrow$	$+$
$B_5' = 4B_4$	$-$	0	$+$
B_5	$\searrow$	0	$\nearrow$

duquel on peut conclure que B_4 s'annule une et une seule fois sur $]0, \frac{1}{2}[$ et que B_5 ne s'annule pas sur $]0, \frac{1}{2}[$.
B.4.b. On va raisonner par récurrence sur k, pour $k = 0$ le résultat est évidement vrai pour $B_0(X) = 1$ et $B_1(X) = X - \frac{1}{2}$.
Supposons que B_{2k} s'annule une et une seule fois sur $]0, \frac{1}{2}[$ et que B_{2k+1} ne s'annule pas sur $]0, \frac{1}{2}[$.
Ainsi $B'_{2k+2} = (2k+2)B_{2k+1}$ garde un signe constant sur $]0, \frac{1}{2}[$, en particulier B_{2k+2} est strictement monotone sur $]0, \frac{1}{2}$, or $B_{2k+2}(\frac{1}{2}) = (-1 + 2^{-1-2k})B_{2k+2}(0)$, donc $B_{2k+2}(\frac{1}{2})$ et $B_{2k+2}(0)$ sont de signe opposés et alors B_{2k+2} s'annule une et une seule fois sur $]0, \frac{1}{2}[$.
D'autre part $B'_{2k+3} = (2k+3)B_{2k+2}$ donc change de signe une seule fois sur $]0, \frac{1}{2}[$, donc B_{2k+3} est soit croissante puis décroissante ou l'inverse sur $]0, \frac{1}{2}[$ or $B_{2k+3}(0) = B_{2k+3}(\frac{1}{2}) = 0$, donc B_{2k+3} garde une signe constant sur $]0, \frac{1}{2}[$, c'est à dire ne s'annulle jamais sur $]0, \frac{1}{2}[$.
B.4.c. D'aprés la question précédente $B'_{2k} = 2kB_{2k-1}$ ne s'annule jamais donc garde un signe constant sur $]0, \frac{1}{2}[$, c'est à dire que B_{2k} est strictement croissante ou strictement décroissante, donc $|B_{2k}|$ atteint son maximum sur $[0, \frac{1}{2}]$ en 0 ou bien en $\frac{1}{2}$, or $|B_{2k}|(\frac{1}{2}) = |(-1 + 2^{1-2k})||B_{2k}|(0) < |B_{2k}|(0)$, donc donc $|B_{2k}|$ atteint son maximum sur $[0, \frac{1}{2}]$ en 0, de plus $B_{2k}(x) = B_{2k}(1-x)$, donc $|B_{2k}|$ se comporte sur $[\frac{1}{2}, 1]$ comme sur $[0, \frac{1}{2}]$ et donc on conclut que $|B_{2k}|$ atteint son maximum sur $[0, 1]$ en 0.

0.3. PARTIE C : Application au calcul approché d'une intégrale.

C.1. $\int_0^1 f^{(2)}(x)B_2(x)dx = \int_0^1 f``(x)B_2(x)dx = [f'(x)B_2(x)]_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 f'(x)B_2'(x)dx = [B_2(1)f'(1) - B_2(1)f'(0)] - [f(x)B_2'(x)]_{x=0}^{x=1} + \int_0^1 f(x)B_2''(x)dx = [B_2(1)f'(1) - B_2(1)f'(0)] - [f(1)2B_1(1) - f(0)2B_1(0)] + \int_0^1 f(x)2B_1'(x)dx = B_2(0)[f^{(1)}(l) - f^{(1)}(0)] - (f(0) + f(1)) + 2\int_0^1 f(x)dx$, car $B_2(1) = B_2(0), B_1(1) = \frac{1}{2}, B_1(0) = -\frac{1}{2}, B_1' = B_0 = 1$
C.2. Pour $n = 1$ le résultat est vrai d'aprés la question précédente.
Supposons le résultat vrai pour n et montrons le pour $n + 1$.

Effectuons deux intégrations par parties successives sur R_n, donc

$$\begin{array}{rll}
R_n & = \frac{1}{(2n)!}\int_0^1 f^{(2n)}(x)B_{2n}(x)dx & \\
& = \frac{1}{(2n)!}\int_0^1 f^{(2n)}(x)\frac{B'_{2n+1}(x)}{2n+1}dx & \\
& = \frac{1}{(2n+1)!}\left(\left[f^{(2n)}(x)B_{2n+1}(x)\right]_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 f^{(2n+1)}(x)B_{2n+1}(x)dx\right) & \\
& = -\frac{1}{(2n+1)!}\int_0^1 f^{(2n+1)}(x)B_{2n+1}(x)dx & \text{car } B_{2n+1}(1)=B_{2n+1}(0)=0 \\
& = -\frac{1}{(2n+1)!}\int_0^1 f^{(2n+1)}(x)\frac{B'_{2n+2}(x)}{2n+2}(x)dx & \\
& = -\frac{1}{(2n+2)!}\left(\left[f^{(2n+1)}(x)B_{2n+2}(x)\right]_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 f^{(2n+2)}(x)B_{2n+2}(x)dx\right) & \\
& = -\frac{B_{2n+2}(0)}{(2n+2)!}\left(f^{(2n+1)}(1)-f^{(2n+1)}(0)\right)+R_{n+1} & \text{car } B_{2n+2}(1)=B_{2n+2}(0)
\end{array}$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence on a :

$$\begin{array}{rl}
\int_0^1 f(x)dx & = \frac{f(O)+f(l)}{2} - \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{B_{2k}(0)}{(2k)!}[f^{(2k-1)}(1)-f^{(2k-1)}(0)] + R_n \\
& = \frac{f(O)+f(l)}{2} - \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{B_{2k}(0)}{(2k)!}[f^{(2k-1)}(1)-f^{(2k-1)}(0)] - \frac{B_{2n+2}(0)}{(2n+2)!}\left(f^{(2n+1)}(1)-f^{(2n+1)}(0)\right) + R_{n+1} \\
& = \frac{f(O)+f(l)}{2} - \sum\limits_{k=1}^{n+1}\frac{B_{2k}(0)}{(2k)!}[f^{(2k-1)}(1)-f^{(2k-1)}(0)] + R_{n+1}
\end{array}$$

d'où le résultat est vrai à l'ordre $n+1$.

C.3. $|R_n| = |\frac{1}{(2n)!}\int_0^1 f^{(2n)}(x)B_{2n}(x)dx| \leq \frac{1}{(2n)!}\int_0^1 |f^{(2n)}(x)B_{2n}(x)|dx \leq M\frac{|B_{2n}(0)|}{(2n)!}$ car $|f^{(2n)}(x)| \leq M$ et $|B_{2n}(x)| \leq |B_{2n}(0)|$, d'aprés B.4.c

FIN DU CORRIGÉ.