

## DS 5 : Polynômes

### Corrigé

#### 0.1. PARTIE A : Etude d'un endomorphisme.

A.1. Il est simple de vérifier que  $\Delta(P + \lambda Q) = \Delta(P) + \lambda \Delta(Q)$ , donc  $\Delta$  est linéaire, de plus  $\Delta(P)$  est un polynôme  $\forall P \in E$ , donc  $\Delta$  est un endomorphisme de  $E$  et pour tout  $n$  entier naturel, si  $P \in E_n$ , alors  $\deg P(X) \leq n$ ,  $\deg P(X+1) = \deg P(X) \leq n$  et  $\text{co}P(X+1) = \text{co}P(X)$ , d'où  $\deg(\Delta P(X)) = \deg(P(X+1) - P(X)) \leq \deg(P) - 1 \leq n$ , donc  $\Delta P(X) \in E_n \quad \forall P \in E_n$  et ainsi  $\Delta$  induit un endomorphisme sur  $E_n$ .

A.2.  $\Delta(1) = 0, \Delta(X) = 1, \Delta(X^2) = (X+1)^2 - X^2 = 1 + 2X, \Delta(X^3) = (X+1)^3 - X^3 = 1 + 3X + 3X^2$ .

La matrice sera alors  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ , ainsi  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in A \Leftrightarrow y = z = t = 0$ , ainsi  $\dim A = 1$  et

alors  $\text{rg}(A) = 4 - 1 = 3$  une base de  $A$  sera donc formée par une famille libre de 3 colonnes de  $A$ , qui n'est autre que la famille formée par les 2ème, 3ème et 4ème colonne de  $A$ .

A.3.

A.3.a.  $P \in \text{Ker}(\Delta_n) \Leftrightarrow P(X+1) = P(X)$ , ainsi en posant  $Q(X) = P(X) - P(0)$ , alors  $Q$  admet une infinité de racines  $0, 1, 2, \dots$ , donc nul, et par suite  $P(X) = P(0)$ , d'où  $P \in E_0$ . Ainsi  $\dim \Delta_n = 1$ , d'où d'après la formule du rang  $\dim \Delta_n(E_n) = \dim \text{Im} \Delta_n = \dim E_n - \dim \Delta_n = n - 1 = \dim E_{n-1}$ , or d'après ce qui précède on a vu que  $\Delta_n(E_n) \subset E_{n-1}$ , d'où égalité.

A.3.b. *Existence* : Pour tout polynôme  $Q$  de  $E_{n-1}$ , on  $Q \in E_{n-1} = \Delta_n(E_n)$ , d'où  $\exists P_0 \in E_n$  tel que :  $\Delta_n(P_0) = Q$ , d'autre part  $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ , on a :  $\Delta_n(P_0 + \lambda) = \Delta_n(P_0) + \Delta_n(\lambda) = \Delta_n(P_0) = Q$  il suffit donc de choisir la constante  $\lambda = -\int_0^1 P_0(x) dx$  de sorte que  $\int_0^1 P(x) dx = 0$  où  $P = P_0 + \lambda$ .

*Unicité* : Soient  $P_1, P_2$  deux polynômes tels que : 
$$\begin{cases} \Delta_n(P_1) = \Delta_n(P_2) = Q \\ \int_0^1 P_1(x) dx = \int_0^1 P_2(x) dx = 0 \end{cases}$$

alors  $\Delta_n(P_1 - P_2) = \Delta_n(P_1) - \Delta_n(P_2) = 0$ , d'où  $P_1 - P_2 = \lambda$ ,

d'où  $\lambda = \int_0^1 \lambda dx = \int_0^1 (P_1(x) - P_2(x)) dx = \int_0^1 P_1(x) dx - \int_0^1 P_2(x) dx = 0$ , d'où  $P_1 = P_2$ .

#### 0.2. PARTIE B : Etude d'une famille de polynômes.

B.1.  $\deg(B_1) = 1$ , donc  $B_1(X) = aX + b, \Delta(B_1) = B_0 = 1 \implies a = 1$ , de plus  $\int_0^1 B_1(x) dx = 0 \implies \frac{a}{2} + b = 0$ , d'où  $B_1(X) = X - \frac{1}{2}$ , de même à l'aide des formules  $\Delta(B_2) = 2B_1$  et  $\int_0^1 B_2(x) dx = 0$ , on trouve que :  $B_2(X) = X^2 - X - \frac{1}{6}$ .

B.2. Posons  $p = \deg B_n$ , donc  $B_n(X) = a_p X^p + \dots + a_0$ , dans ce  $B_n(X+1) = a_p(X+1)^p + \dots + a_0 = a_p X^p + (pa_p + a_{p-1})X^{p-1} + \dots + a_0$ , donc  $\Delta(B_n) = pa_p X^{p-1} + \dots = nX^{n-1}$ , d'où  $p = n, a_p = 1$ , ainsi le degré de  $B_n$  est  $n$ , et son coefficient dominant est 1.

B.3.a.  $\forall n \geq 2$ , on a :  $B_n(1) - B_n(0) = \Delta B_n(0) = 0$  car  $\Delta_n(B_n) = nX^{n-1}$ .

B.3.b. On a :  $B_n(X+1) - B_n(X) = nX^{n-1}$ , après dérivation on obtient  $\frac{B'_n}{n}(X+1) - \frac{B'_n}{n}(X) = (n-1)X^{n-2}$ , de plus  $\int_0^1 \frac{B'_n}{n}(x) dx = \frac{B_n(1) - B_n(0)}{n} = 0$ , ainsi  $\frac{B'_n}{n}$  vérifie la même propriété que  $B_{n-1}$ , l'unicité permet d'affirmer que  $\frac{B'_n}{n} = B_{n-1}$ .

B.3.c. On a :  $\Delta(S_n)(x) = S_n(X+1) - S_n(X) = (-1)^n (B_n(-X) - B_n(l-X)) = -(-1)^n \Delta B_n(-X) = (-1)^{n+1} \Delta(B_n)(-X)$ . or  $\Delta(B_n)(X) = nX^{n-1}$ , d'où  $\Delta(S_n)(x) = (-1)^{n+1} \Delta(B_n)(-X) = (-1)^{n+1} n(-X)^{n-1} =$

$nX^{n-1} = \Delta(B_n)(X)$ , ainsi  $\Delta(B_n(X) - S_n(X)) = 0$ , d'où  $B_n(X) - S_n(X) = \lambda$ , en intégrant cette égalité entre 0 et 1 on trouve  $\lambda = 0$ , car  $\int_0^1 S_n(x)dx = (-1)^n \int_0^1 B_n(1-x)dx = (-1)^n \int_0^1 B_n(u)du = 0$ , d'où l'égalité :  $B_n(x) = (-1)^n B_n(1-x)$ .

Ainsi  $B_{2k+1}(0) = -B_{2k+1}(0)$ , or  $B_{2k+1}(0) = B_{2k+1}(0)$  d'après B.3.a, d'où  $B_{2k+1}(0) = B_{2k+1}(0) = 0$  et de même  $B_{2k+1}(\frac{1}{2}) = -B_{2k+1}(\frac{1}{2})$ , d'où  $B_{2k+1}(\frac{1}{2}) = B_{2k+1}(\frac{1}{2}) = 0$ .

B.3.d. Posons  $C_n(x) = 2^{n-1} (B_n(\frac{x}{2}) + B_n(\frac{x+1}{2}))$ , on a alors  $\Delta C_n(X) = C_n(X+1) - C_n(X) = 2^{n-1} (B_n(\frac{X}{2} + 1) + B_n(\frac{X}{2}) - B_n(\frac{X}{2}) - B_n(\frac{X+1}{2})) = 2^{n-1} (B_n(\frac{X}{2} + 1) - B_n(\frac{X}{2})) = 2^{n-1} \Delta B_n(\frac{X}{2}) = 2^{n-1} n (\frac{X}{2})^{n-1} = nX^{n-1} = \Delta B_n(X)$ , d'où  $C_n(X) - B_n(X) = \lambda$ , d'autre part  $\int_0^1 C_n(x)dx = 2^{n-1} (\int_0^1 B_n(\frac{x}{2})dx + \int_0^1 B_n(\frac{x+1}{2})dx) = 2^n (\int_0^{\frac{1}{2}} B_n(u)du + \int_{\frac{1}{2}}^1 B_n(u)du) = 2^n \int_0^1 B_n(u)du = 0$ , on a posé  $u = \frac{x}{2}$ , comme changement de variable dans la 1ère intégrale et  $u = \frac{x+1}{2}$  dans la deuxième, d'où  $\lambda = \int_0^1 \lambda dx = \int_0^1 C_n(x)dx - \int_0^1 B_n(x)dx = \int_0^1 (C_n(x) - B_n(x))dx = 0$ , d'où  $C_n(x) = B_n(x)$ .

En prenant  $x = 0$  dans l'égalité :  $B_n(x) = 2^{n-1} (B_n(\frac{x}{2}) + B_n(\frac{x+1}{2}))$ , on trouve que :  $B_{2k}(\frac{1}{2}) = (-1 + 2^{1-2k})B_{2k}(0)$ .

B.4.a. D'après B.3.c  $B_3$  a comme racines : 0,  $\frac{1}{2}$  et 1, or il est de degré 3, donc ne peut pas en avoir d'autres, en particulier il ne s'annule pas sur  $]0, \frac{1}{2}[$ .

D'après la formule précédente pour  $k = 2$ , on a :  $B_4(0) = -B_4(\frac{1}{2})$ , donc  $B_4$  s'annule au moins une fois sur  $]0, \frac{1}{2}[$ . D'autre part on a le tableau de variation global suivant :

$x$	0	$\alpha$	$\frac{1}{2}$
$B_3$	+	+	+
$B'_4 = 3B_3$	+	+	+
$B_4$	-	/	+
$B'_5 = 4B_4$	-	0	+
$B_5$	\	0	/

duquel on peut conclure que  $B_4$  s'annule une et une seule fois sur  $]0, \frac{1}{2}[$  et que  $B_5$  ne s'annule pas sur  $]0, \frac{1}{2}[$ .

B.4.b. On va raisonner par récurrence sur  $k$ , pour  $k = 0$  le résultat est évidemment vrai pour  $B_0(X) = 1$  et  $B_1(X) = X - \frac{1}{2}$ .

Supposons que  $B_{2k}$  s'annule une et une seule fois sur  $]0, \frac{1}{2}[$  et que  $B_{2k+1}$  ne s'annule pas sur  $]0, \frac{1}{2}[$ . Ainsi  $B'_{2k+2} = (2k+2)B_{2k+1}$  garde un signe constant sur  $]0, \frac{1}{2}[$ , en particulier  $B_{2k+2}$  est strictement monotone sur  $]0, \frac{1}{2}[$ , or  $B_{2k+2}(\frac{1}{2}) = (-1 + 2^{-1-2k})B_{2k+2}(0)$ , donc  $B_{2k+2}(\frac{1}{2})$  et  $B_{2k+2}(0)$  sont de signe opposés et alors  $B_{2k+2}$  s'annule une et une seule fois sur  $]0, \frac{1}{2}[$ .

D'autre part  $B'_{2k+3} = (2k+3)B_{2k+2}$  donc change de signe une seule fois sur  $]0, \frac{1}{2}[$ , donc  $B_{2k+3}$  est soit croissante puis décroissante ou l'inverse sur  $]0, \frac{1}{2}[$  or  $B_{2k+3}(0) = B_{2k+3}(\frac{1}{2}) = 0$ , donc  $B_{2k+3}$  garde un signe constant sur  $]0, \frac{1}{2}[$ , c'est à dire ne s'annule jamais sur  $]0, \frac{1}{2}[$ .

B.4.c. D'après la question précédente  $B'_{2k} = 2kB_{2k-1}$  ne s'annule jamais donc garde un signe constant sur  $]0, \frac{1}{2}[$ , c'est à dire que  $B_{2k}$  est strictement croissante ou strictement décroissante, donc  $|B_{2k}|$  atteint son maximum sur  $[0, \frac{1}{2}]$  en 0 ou bien en  $\frac{1}{2}$ , or  $|B_{2k}(\frac{1}{2})| = |(-1 + 2^{1-2k})||B_{2k}(0)| < |B_{2k}(0)|$ , donc donc  $|B_{2k}|$  atteint son maximum sur  $[0, \frac{1}{2}]$  en 0, de plus  $B_{2k}(x) = B_{2k}(1-x)$ , donc  $|B_{2k}|$  se comporte sur  $[\frac{1}{2}, 1]$  comme sur  $[0, \frac{1}{2}]$  et donc on conclut que  $|B_{2k}|$  atteint son maximum sur  $[0, 1]$  en 0.

### 0.3. PARTIE C : Application au calcul approché d'une intégrale.

C.1.  $\int_0^1 f^{(2)}(x)B_2(x)dx = \int_0^1 f''(x)B_2(x)dx = [f'(x)B_2(x)]_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 f'(x)B'_2(x)dx = [B_2(1)f'(1) - B_2(1)f'(0)] - [f(x)B'_2(x)]_{x=0}^{x=1} + \int_0^1 f(x)B''_2(x)dx = [B_2(1)f'(1) - B_2(1)f'(0)] - [f(1)2B_1(1) - f(0)2B_1(0)] + \int_0^1 f(x)2B'_1(x)dx = B_2(0)[f^{(1)}(1) - f^{(1)}(0)] - (f(0) + f(1)) + 2 \int_0^1 f(x)dx$ , car  $B_2(1) = B_2(0)$ ,  $B_1(1) = \frac{1}{2}$ ,  $B_1(0) = -\frac{1}{2}$ ,  $B'_1 = B_0 = 1$

C.2. Pour  $n = 1$  le résultat est vrai d'après la question précédente.

Supposons le résultat vrai pour  $n$  et montrons le pour  $n + 1$ .

Effectuons deux intégrations par parties successives sur  $R_n$ , donc

$$\begin{aligned}
 R_n &= \frac{1}{(2n)!} \int_0^1 f^{(2n)}(x) B_{2n}(x) dx \\
 &= \frac{1}{(2n)!} \int_0^1 f^{(2n)}(x) \frac{B'_{2n+1}(x)}{2n+1} dx \\
 &= \frac{1}{(2n+1)!} \left( [f^{(2n)}(x) B_{2n+1}(x)]_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 f^{(2n+1)}(x) B_{2n+1}(x) dx \right) \\
 &= -\frac{1}{(2n+1)!} \int_0^1 f^{(2n+1)}(x) B_{2n+1}(x) dx && \text{car } B_{2n+1}(1) = B_{2n+1}(0) = 0 \\
 &= -\frac{1}{(2n+1)!} \int_0^1 f^{(2n+1)}(x) \frac{B'_{2n+2}(x)}{2n+2} dx \\
 &= -\frac{1}{(2n+2)!} \left( [f^{(2n+1)}(x) B_{2n+2}(x)]_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 f^{(2n+2)}(x) B_{2n+2}(x) dx \right) \\
 &= -\frac{B_{2n+2}(0)}{(2n+2)!} (f^{(2n+1)}(1) - f^{(2n+1)}(0)) + R_{n+1} && \text{car } B_{2n+2}(1) = B_{2n+2}(0)
 \end{aligned}$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence on a :

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 f(x) dx &= \frac{f(0)+f(1)}{2} - \sum_{k=1}^n \frac{B_{2k}(0)}{(2k)!} [f^{(2k-1)}(1) - f^{(2k-1)}(0)] + R_n \\
 &= \frac{f(0)+f(1)}{2} - \sum_{k=1}^n \frac{B_{2k}(0)}{(2k)!} [f^{(2k-1)}(1) - f^{(2k-1)}(0)] - \frac{B_{2n+2}(0)}{(2n+2)!} (f^{(2n+1)}(1) - f^{(2n+1)}(0)) + R_{n+1} \\
 &= \frac{f(0)+f(1)}{2} - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{B_{2k}(0)}{(2k)!} [f^{(2k-1)}(1) - f^{(2k-1)}(0)] + R_{n+1}
 \end{aligned}$$

d'où le résultat est vrai à l'ordre  $n + 1$ .

C.3.  $|R_n| = \left| \frac{1}{(2n)!} \int_0^1 f^{(2n)}(x) B_{2n}(x) dx \right| \leq \frac{1}{(2n)!} \int_0^1 |f^{(2n)}(x) B_{2n}(x)| dx \leq M \frac{|B_{2n}(0)|}{(2n)!}$  car  $|f^{(2n)}(x)| \leq M$   
et  $|B_{2n}(x)| \leq |B_{2n}(0)|$ , d'après B.4.c

FIN DU CORRIGÉ.