DS 6 : *Développements limités et Polynômes*

Jeudi le 04 Mars 2004

Durée : *3 heures 30 mn*

Préambules :
L'énoncé de cette épreuve comporte 2 pages .
Les candidats sont informés que la précision des raisonnements ainsi que le soin apporté à la rédaction seront des éléments pris en compte dans la notation .Les candidats pourront admettre et utiliser le résultat d'une question non résolue s'ils l'indiquent clairement sur la copie. Il convient en particulier de rappeler avec précision les références des questions abordées .
Le probléme est tiré concours 1995 Mines d'Albi, Alès, Douai et Nantes . Les exercices du développements limités seront notés sur le résultat final , mais il est obligatoire de rédiger sur l'épreuve tous les calculs intermédiaires .

PROBLÈME :

Notations : n est un entier naturel fixé, $n \geq 2$. $\mathcal{F}$ est l'espace vectoriel des fonctions réelles définies sur $\mathbb{R}$. E est le sous-espace vectoriel des fonctions polynômes à coefficients réels. E_n est le sous-espace vectoriel des fonctions polynômes à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à n.

PARTIE I : *8 points*

Si $f \in \mathcal{F}$, on note $\Delta(f)$ et $T(f)$ les fonctions réelles définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R} : \Delta(f)(x) = f(x+1) - f(x), \quad \text{et} \quad T(f)(x) = f(x+1)$$

On admettra (aisément !) que Δ et T sont des endomorphismes de $\mathcal{F}$. On note $\Delta^0 = T^0 = Id_{\mathcal{F}}$ (donc, si $f \in \mathcal{F}$, $\Delta^0(f) = T^0(f) = f$), et, si $j \in \mathbb{N}$, $j \geq 1$, $\Delta^j = \Delta^{j-1} \circ \Delta = \Delta \circ \Delta^{j-1}$, $T^j = T^{j-1} \circ T = T \circ T^{j-1}$.

1)a)i) (1 pt) .Soit $P \in E$, non constant. $\Delta(P)$ est une fonction polynôme. Comparer les degrés de $\Delta(P)$ et de P. Calculer le coefficient dominant de $\Delta(P)$ en fonction de celui de P.

ii) (0.75 pts) .Vérifier que Δ induit un endomorphisme de E_n, noté Δ_n.

b)i) (0.75 pts) .Déterminer $\mathbb{K}er\Delta_n$.

ii) (0.25 pts) .En déduire le rang de Δ_n.

2) Pour $k \in \mathbb{N}$, on définit les fonctions polynômes N_k par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, N_0(x) = 1 \quad \text{et} \quad N_k(x) = \frac{x(x-1)\dots(x-k+1)}{k!}$$

a)i) (0.75 pts).Pour $k \geq 1$, montrer que : $\Delta(N_k) = N_{k-1}$.

ii) (0.5 pts).Calculer $\Delta(N_0)$.

iii) (1pt) .Calculer, pour $j \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}$, $\Delta^j(N_k)$, puis $\big(\Delta^j(N_k)\big)(0)$.
Distinguer les deux cas : $j > k; j \leqslant k$.

b)i) (0.75 pts) .Montrer que la famille $(N_0, N_1, \dots, N_n)$ est une base de E_n.

ii) (0.75 pts) .Soit $P \in E_n$. Montrer que : $P = a_0N_0 + a_1N_1 + \ldots + a_nN_n$ avec $a_j = \big(\Delta^j(P)\big)(0)$.

3)a) (0.5 pts) .Soient $k \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathcal{F}$. Montrer que pour $x \in \mathbb{R}$, $\big(T^k(f)\big)(x) = f(x+k)$.

b) Soit $j \in \mathbb{N}$. Soit $f \in \mathcal{F}$.

i) (0.75 pts) .Montrer que : $\Delta^j(f) = \sum\limits_{k=0}^{j} C_j^k T^k(f)(-1)^{j-k}$.

(*On pourra remarquer que* $\Delta = T - Id_{\mathcal{F}}$).

ii) (0.25 pts) .En déduire que $\big(\Delta^j(f)\big)(0)$ ne dépend que des valeurs $f(0), f(1), \ldots, f(j)$.

PARTIE II : *5 points*

On se donne une fonction f de $\mathcal{F}$. On cherche les polynômes solutions du problème $(\mathcal{P})$ suivant :

$(\mathcal{P})\quad deg(P) \leq n \quad \forall k \in \{0, 1, \ldots, n\}, P(k) = f(k)$ .On pose $N(x) = \prod\limits_{j=0}^{n}(x-j) = x(x-1)\ldots(x-n)$.

1)a) (1 pt) .Soit l'application linéaire

$$\begin{array}{rcl} \Phi : E_n & \to & \mathbb{R}^{n+1} \\ P & \mapsto & \big(P(0), \ldots, P(n)\big) \end{array}$$

Montrer que Φ est un isomorphisme.

b) (0.5 pts). En déduire que le problème $(\mathcal{P})$ possède une unique solution notée P_f.

2)a) (0.5 pts) .Pour $j \in \{0, 1, \ldots, n\}$, comparer $\big(\Delta^j(f)\big)(0)$ et $\big(\Delta^j(P_f)\big)(0)$.

b) (0.5 pts) .En déduire l'expression de P_f en fonction des $\big(\Delta^j(f)\big)(0)$ et des polynômes N_j.

3) Dans cette question, on suppose que f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$.

On note $M_n = \sup\{\big|f^{(n+1)}(t)\big|, t \in [0, n]\}$.

a) (1.5 pts) .Soit $x \in [0, n]$, non entier. Montrer que : $\exists c \in]0, n[\, / f(x) - P_f(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}N(x)$.

(*On pourra poser* $\varphi(t) = f(t) - P_f(t) - KN(t)$, *où* K *est tel que* $\varphi(x) = 0$, *et appliquer judicieusement le théorème de Rolle*).

b) (1 pt) .En déduire que : $\forall x \in [0, n], \big|f(x) - P_f(x)\big| \leq \frac{1}{n+1}M_n$.

(*On pourra montrer par récurrence sur* n *que* : $\big|N(x)\big| \leqslant n! \quad \forall x \in [0, n]$.

EXERCICES : *7 points*

Chaque question est notée sur 1 point .

1. Donner un $DL_2(0)$ de $f(x) = \frac{\ln(\cos(ax))}{\ln(\cos(bx))}$.
2. Donner un $DL_3(0)$ de $\tan(x)$ en utilisant les méthodes suivantes :
   (a) $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$.
   (b) $\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$.
   (c) $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x)$.
3. En déduire le $DL_3(0)$ de $\arctan(x)$.
4. Donner la partie principale en 0 de la fonction $g(x) = \sqrt{1 + 2x + 2x^2} - \sqrt[3]{1 + 3x + 3x^2}$.
5. Etudier les branches infinies , équation et position , en $+\infty$ de la fonction $h(x) = x\left(\sqrt[3]{x^3 + 1} - \sqrt{x^2 + x}\right)$.

FIN