MPSI 1
CPGE Agadir

Les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées

$\boxed{\textbf{L'usage des calculatrices est interdit}}$

R désigne l'ensemble des nombres réels

DS 7
Samedi le 20-03-2002
Polynomes d'interpolation de Lagrange
Duree : 3h

On note $R_n[X]$ **l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à** n,
et B ? $\{1,X,X^2...,X^n\}$ **sa base canonique**.

Etant donné une famille de $(n ? 1)$ **réels distincts** $a_0 ? a_1 ? a_2 ? ... ? a_n$, **on lui associe les polynomes** $L_0,L_1,L_2...L_n$ **de** $R_n[X]$ **tels que :**

$?j ? \{0,1,2,..n\} ? \{i\} \quad L_i?a_j?? 0$

et $L_i?a_i?? 1$

On note enfin A **la matrice carrée dont les vecteurs colonnes sont les composantes dans la base** B **des vecteurs** $L_0,L_1,L_2,...L_n$.

I) On prend $n ? 2,\ a_0 ? 0,\ a_1 ? 1,\ a_2 ? 2$.

1) Donner L_0,L_1,L_2
Montrer que (L_0,L_1,L_2) **est une base de** $R_2[X]$.
Quelles sont les les composantes d'un polynome P **de** $R_2[X]$ **dans cette base** (L_0,L_1,L_2) ?
2) Former la matrice de passage de $B ? \{1,X,X^2\}$ **à** $B^? ? (L_0,L_1,L_2)$
Montrer qu'elle admet une valeur propre entière, déterminer l'espace propre associé.
3) Déterminer de deux methodes differentes les polynomes P **de** $R_2[X]$ **tels que**

$P?X?? P?0?? P?1?X ? P?2?X^2$

II) Retour au cas général

1) Montrer que $B^? ? (L_0,L_1,L_2..L_n)$ **est une base de** $R_n[X]$.
Indiquer les composantes sur la base $B^?$ **d'un polynome** P **quelconque de** $R_n[X]$.
2) Montrer que A **est inversible, calculer son inverse**
3) Montrer que $\overset{n}{\underset{i?0}{?}} L_i ? 1$.

En déduire que la somme des éléments de la première ligne de A **est égale à 1, et que la somme des éléments de toute autre ligne de** A **est nulle.**

III) Etude du cas $\mathbf{a}_0 ? 0$

1) Montrer que la matrice A **admet** $? ? 1$ **pour valeur propre.**
2) Montrer qu'il existe des polynomes P **de** $R_n[X]$ **, différents du polynôme nul tels que :** $P?X?? \overset{n}{\underset{i?0}{?}} P?a_i?X^i$

IV) Etude du cas $\mathbf{a}_0 ? 1$

Montrer que la somme des éléments de la première colonne de A **est égale à 1, et que la somme des éléments de toute autre colonne de** A **est nulle.**

V) Etude du cas $a_0 ? 0,\ a_1 ? 1,\ a_2 ? 2,... \quad a_n ? n$

On note dorénavant :

$L_{i,p}$ **le polynôme de** $R_p[X]$ **tel que**

$?j ? \{0,1,..p\} ? \{i\} \quad L_{i,p}?j?? 0$

et $L_{i,p}?i?? 1$

Et on convient que $L_{0,0} ? 1$

1) Montrer que $B^{??} ? (L_{0,0},L_{1,1},L_{2,2}...,L_{n,n})$ **est une base de** $R_n[X]$.
Soit le polynôme $P ? \overset{n}{\underset{k?0}{?}} (?1)^k L_{k,k}$ **, déterminer ses racines.**

2) a) Ecrire la matrice de passage de

$B^? ? \left\{L_{0,n}\ ,\ L_{1,n}\ ,\ L_{2,n} \ldots\ ,\ L_{n,n}\right\}$ **à** $B^{??}$

b) Montrer que l'on peut écrire la matrice A **comme le produit d'une matrice triangulaire supérieure et d'une matrice triangulaire inférieure**.

c) Effectuer tous les calculs du V 2) b) pour $n ? 2,\ a_0 ? 0,\ a_1 ? 1,\ a_2 ? 2$