MPSI-Prépas High Tech

Contrôle
Polynômes

Rabat le 5 avril 2010

Durée : 1 heure

Blague du jour :

Un homme demande à un commercial : "quel est le montant de vos honoraires ?"
Le commercial lui répond qu'il est de 10 000 Dhs pour trois questions.
l'homme lui demande alors : "n'est-ce pas un peu excessif ?"
le commercial lui répond : "Si. Quelle est votre troisième question ?"

Mathématicien du jour **Green**
George Green (1793-1841), physicien britannique. L'histoire de sa vie a ceci d'exceptionnel qu'il était presque totalement autodidacte : il n'a passé qu'un an environ à l'école, entre 8 et 9 ans. Au cours de sa vie adulte, George Green a travaillé dans le moulin de son père, il intégra l'université comme étudiant à l'âge de 40 ans. Le travail de Green fut peu reconnu par la communauté mathématique au cours de sa vie. Il fut redécouvert en 1846 par Lord Kelvin, qui le fit connaître.

E_n est le sous-espace vectoriel des fonctions polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \Delta(f)(x) = f(x+1) - f(x) \text{ et } T(f)(x) = f(x+1)$$

On admettra (aisément !) que Δ et T sont des endomorphismes de $\mathcal{F}$.

$\Delta^0(f) = T^0(f) = f$), et, si $j \in \mathbb{N}$, $j \geq 1$, $\Delta^j = \Delta^{j-1} \circ \Delta = \Delta \circ \Delta^{j-1}$,

1) a) i. Soit $P \in E$, non constant. $\Delta(P)$ est une fonction polynôme. Comparer les degrés de $\Delta(P)$ et de P.
Calculer le coefficient dominant de $\Delta(P)$ en fonction de celui de P.
ii. Vérifier que Δ induit un endomorphisme de E_n noté Δ_n.

b) i. Déterminer $\ker \Delta_n$.
ii. Montrer que $\operatorname{Im} \Delta_n \subset E_{n-1}$.

2) Pour $k \in \mathbb{N}$, on définit les fonctions polynômes N_k par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad N_0(x) = 1 \text{ et } N_k(x) = \frac{x(x-1)\cdots(x-k+1)}{k!}$$

a) i. Pour $k \geq 1$, exprimer $\Delta(N_k)$ en fonction des polynômes $(N_j)_{j\geq 0}$.
ii. Calculer, pour $j \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}$, $\Delta^j(N_k)$, puis $\left(\Delta^j(N_k)\right)(0)$.

b) i. Montrer que la famille $(N_0, N_1, \ldots, N_n)$ est une base de E_n. Soit $P \in E_n$. P s'écrit $P = a_0N_0 + a_1N_1 + \cdots + a_nN_n$, où $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Exprimer les a_j en fonction des $\left(\Delta^j(P)\right)(0)$.

Fin