CPGE My Youssef, Rabat

بِسمِ اللَّهِ الرَّحمَنِ الرَّحِيمِ
وَ قُلِ إعمَلُوا فَسَيَرَى اللَّهُ عَمَلَكُمْ وَ رَسُولُهُ وَ المُؤ مِنُون

صَدَقَ اللَّهُ العَظِيم

Corrigé Contrôle: *Polynômes* *Fractions rationnelles*

Jeudi 30 Avril 2009
Durée : 1 heure

Blague du jour :
• Deux puces se retrouvent avec un labrador et elles commencent à discuter :
- Qu'est-ce que tu a regardé hier soir à la télé ? La deuxième chienne ?
- Non, canal puce ...
• Qu'est-ce qu'un dromadaire ?
Réponse : c'est un chameau qui bosse double !

Mathématicien du jour — ***Ibn Khaldoun***
Ibn Khaldoun, de son nom complet Wali ad-Dine Abou Zayd Abderrahman ben Mohammed ben Mohammed ben Hassan ben Jabir ben Mohammed ben Ibrahim ben Abderrahman ben Khalid (Khaldoun) el-Hadrami (1332,Tunis-1406 Le Caire), est un historien, philosophe et homme politique.
Sa façon d'analyser les changements sociaux qu'il a observé dans sa culture lui vaut d'être considéré comme étant à l'avant-garde de la sociologie. C'est surtout un historien de premier plan.
Sa vie se déroule dans une époque trouble marquée par l'apparition de la peste noire et par d'incessantes luttes dynastiques en Afrique du Nord, au Maroc : les Mérinides et les Almohades, les Abdalwadides en Algérie et les Hafsides en Tunisie.

Exercice 1 : — **Source : Pr Dehame, PCSI-France**

---

1. $P_1 = \frac{X^2}{2} + \frac{X}{2}$, $P_2 = \frac{X^3}{3} + \frac{X^2}{2} + \frac{X}{6}$, $P_3 = \frac{X^4}{4} + \frac{X^3}{2} + \frac{X^2}{4}$, $P_4 = \frac{X^5}{5} + \frac{X^4}{2} + \frac{X^3}{3} - \frac{X}{30}$.
2. Unicité : Si deux polynômes P et Q vérifient ces conditions, alors on vérifie par récurrence sur k que, pour tout k entier naturel, on a $P(k) = Q(k)$. Le polynôme $P - Q$ a alors une infinité de racines (tous les entiers naturels), c'est donc le polynôme nul.
Vérification : par récurrence sur n : • pour $n = 0$, on a bien $P_0(0) = 0$ et $P_0(X) - P_0(X-1) = 1$; • Pour $n \in \mathbb{N}$ donc, supposons $P_n(0) = 0$ et $P_n(X) - P_n(X-1) = X^n$. On a alors $P'_{n+1}(X) = (n+1)\,P_n(X) + 1 - (n+1)\displaystyle\int_0^1 P_n(t)\,dt$, d'où

$$P'_{n+1}(X) - P'_{n+1}(X-1) = (n+1)\left[P_n(X) - P_n(X-1)\right] = (n+1)\,X^n = (X^{n+1})'\,.$$

De plus, $P_{n+1}(0) = 0$ et $P_{n+1}(1) = 1$, donc le polynôme $P_{n+1}(X) - P_{n+1}(X-1)$ prend la même valeur que le polynôme X^{n+1} pour $X = 1$; comme ces deux polynômes ont la même dérivée, ils coïncident : c'est ce qu'il fallait démontrer. 3. $P_n(0) = 0$ **et** $P_n(0) - P_n(-1) = 0^n = 0$ **si** $n \geq 1$,

donc $P_n(-1) = 0$. Le polynôme P_n est donc divisible par $X(X+1) = X^2 + X$. On obtient les factorisations

$$P_1 = \frac{X(X+1)}{2} \quad ; \quad P_2 = \frac{X(X+1)(2X+1)}{6} \quad ; \quad P_3 = \frac{X^2(X+1)^2}{4}$$

$$P_4 = X(X+1)\,\frac{6X^3+9X^2+X-1}{30}\,.$$

4. P_0 **est de degré 1 et, si** P_n **est de degré** $n+1$ **pour un entier naturel** n **donné, la définition de** P_{n+1} **par la relation de récurrence de l'énoncé montre que** P_{n+1} **est de degré** $n+2$ **: on a donc** $\deg(P_n) = n+1$ **pour tout** $n \in \mathbb{N}$**. Il semble que le coefficient dominant de** P_n **soit** $\frac{1}{n+1}$ **et que son coefficient de degré** n **soit** $\frac{1}{2}$ **(c'est vrai pour** $n = 1, 2, 3, 4$**). Si c'est vrai pour un** n **donné** ($n \geq 1$)**, on a alors** $P_n = \frac{X^{n+1}}{n+1} + \frac{X^n}{2} + Q_n$ **avec** $\deg(Q_n) \leq n-1$**, d'où**

$$\int_0^X P_n(t)\,dt = \frac{X^{n+2}}{(n+1)(n+2)} + \frac{X^{n+1}}{2(n+1)} + R_n \qquad \textbf{avec} \qquad \deg(R_n) \leq n\,,$$

donc $P_{n+1} = \frac{X^{n+2}}{n+2} + \frac{X^{n+1}}{2} + S_n$**, avec** $\deg(S_n) \leq n$**, ce qu'il fallait prouver. La démonstration est achevée par récurrence. 5. Soit** p **un entier naturel. On a** $P_n(0) = 0$, $P_n(1) - P_n(0) = 1^n$, $P_n(2) - P_n(1) = 2^n$, $\ldots$, $P_n(p) - P_n(p-1) = p^n$**. En sommant ces égalités, on obtient** $P_n(p) = \sum_{k=1}^{p} k^n$**.**
Remarque. **On retrouve les formules bien connues**

$$\sum_{k=1}^{p} k = P_1(p) = \frac{p(p+1)}{2} \quad ; \quad \sum_{k=1}^{p} k^2 = P_2(p) = \frac{p(p+1)(2p+1)}{6}\,.$$

Exercice 2

---

1) **Soit** $Q(X) = X^6 - 2X^5 + X^4 - X^3 + 2X^2 - 2X$.
- **a)** **une racine évidente de** Q **: zéro.**
- **b)** **On vérifie que** $Q(1) = Q'(1) = Q''(1) = 0$**, mais que** $Q'''(1) \neq 0$**, donc 1 est une racine de** Q **de multiplicité 3.**
- **c)** **Dans** $\mathbb{R}[X]$**, on a** $Q(X) = X(X-1)^3(X^2+X+1)$**, alors que dans** $\mathbb{C}[X]$**, on a :** $Q(X) = X(X-1)^3(X-j)(X-j^2)$**.**

2) **On pose** $P(X) = 2X+1$ **et** $F(X) = \dfrac{P(X)}{Q(X)}$**.**
- **a)** **La partie entière de** F **est nulle, puisque sont degré est stric.**
- **b)** **Les pôles de** F**, sont les racines de** Q**, donc 0 de multiplicité 1, 1 de multiplicité 3 et enfin** j **et** j^2 **de multiplicité 1 chacune.**
- **c)** $F(X) = \dfrac{a}{X} + \dfrac{b}{X-1} + \dfrac{c}{(X-1)^2} + \dfrac{d}{(X-1)^3} + \dfrac{e}{X-j^2} + \dfrac{f}{X-j^2}$.
- **d)** $a = -1, b = \dfrac{4}{3}, c = -\dfrac{4}{3}, d = 1, e = -\dfrac{1}{3} + i\dfrac{1}{6\sqrt{3}}, e = -\dfrac{1}{3} - i\dfrac{1}{6\sqrt{3}}$.
- **e)** **La décomposition en éléments simples de** F **dans** $\mathbb{R}(X)$ **est :**

```
> Q:=expand(x*(x-1)^3*(x^2+x+1));
```

$$Q := x^6 - 2\,x^5 + x^4 - x^3 + 2\,x^2 - x$$

```
> P:=2*x+1;
```

$$P := 2\,x + 1$$

```
> convert(P/Q,parfrac,x);
```

$$-\frac{1}{x} + \frac{1}{(x-1)^3} - \frac{4}{3}\,\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{4}{3}\,\frac{1}{x-1} - \frac{1}{3}\,\frac{x+1}{x^2+x+1}$$