© 2003 : *www.chez.com/myismail*

MPSI 1 **2002-2003**

CPGE Agadir

Controle N°5

Samedi le : 01 Février-2003

Polynomes & Fractions Rationnelles

Durée : 2 h

1. Polynomes :7 points

Soit $f : [-1,1] \to IR$ continue, $n \in IN^*$ fixes dans tout le probléme

a. *Polynômes d'interpolation de Lagrange* :

Soit $(r_k)_{1\leq k\leq n}$ réels de $[-1,1]$ deux a deux distincts , on pose $L_k(X) = \prod_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} \frac{X-r_i}{r_k-r_i}$

- **i.** (0.25) calculer $L_k(r_j)$ pour $1 \leq j,k \leq n$
- **ii.** (0.25) en déduire que la famille $(L_k)_{1\leq k\leq n}$ est une base de $IR_{n-1}[X]$.
- **iii.** (0.5) exprimer tout $P \in IR_{n-1}[X]$ dans cette base
- **iv.** (0.25) en déduire que $\exists ! P \in IR_{n-1}[X]$ qui interpole f aux point $(r_k)_{1\leq k\leq n}$ cad $f(r_k) = P(r_k)$ pour tout $1 \leq k \leq n$

b. *Polynômes de tchebechev*: $T_n(X) = cos(n \arccos(X))$.

- **i.** (1 pt) Montrer que T_n est un polynôme de degré n , préciser son coefficient dominant
- **ii.** (0.25) Montrer que $T_n(cos(t)) = cos(nt)$ pout tout réel t, en déduire les racines de T_n
- **iii.** (0.25) Calculer $\sup_{x\in[-1,1]} |T_n(x)|$

c. *Recherche des points réalisant la meilleure interploation*:

On se propose dans cette partie de déterminer les points $(r_k)_{1\leq k\leq n}$ réalisant la meilleure interpolation c-a-d pour les quels $\sup_{x\in[-1,1]} |P(x) - f(x)|$ est minimale où P est le polynome de *Lagrange* de $(a : (iv))$

- **i.** (0.5) Soit $x \in [a,b], A = \frac{f(x)-P(x)}{\prod_{i=1}^{n}(x-r_i)}$, montrer que la fonction ,g, definie sur $[-1,1]$ par :

  $$g(t) = f(t) - P(t) - A\prod_{i=1}^{n}(t-r_i)$$ s'annule $n+1$ fois sur $[-1,1]$
- **ii.** (0.5) En déduire que $g^{(n)}$ s'annule au moins une fois sur $[-1,1]$,
- **iii.** (0.5) En déduire que $\exists c_x \in [-1,1]$ tel que : $A = \frac{f^{(n)}(c_x)}{n!}$
- **iv.** (0.25) En déduire que : $\sup_{x\in[-1,1]} |P(x) - f(x)| \leq M \sup_{x\in[0,1]} \prod_{i=1}^{n}|x - r_i|$ avec $M = |f^{(n)}(t)|$
- **v.** (0.75) On pose $Q(X) = \prod_{i=1}^{n}|X - r_i|$, supposons que : $\sup_{x\in[-1,1]} |Q(x)| < \frac{1}{2^{n-1}}$,montrer que

  $\left(Q - \frac{T_n}{2^{n-1}}\right)(\cos(\frac{k\pi}{n}))$ est de meme signe que $(-1)^k, \forall 1 \leq k \leq n$.
- **vi.** (0.75) En deduire une contradiction,puis conclure que : $\sup_{x\in[-1,1]} |Q(x)| \geq \frac{1}{2^{n-1}}$
- **vii.** (0.5) Montrer que si l'on prend $(r_k)_{1\leq k\leq n}$ les racines du polynome de *Tchebechev* on a : $\sup_{x\in[-1,1]} |Q(x)| = \frac{1}{2^{n-1}}$
- **viii.** (0.5) Quels sont les points $(r_k)_{1\leq k\leq n}$ réalisant la meilleure interpolation,jistifier votre réponse.

2. Fractions Rationnelles :4 points

Decomposer dans $IR(X)$ la faction rationnelles suivante : $F(x) = \frac{X^6+1}{(X^2+1)^2(X-1)^3}$