MPSI 1 **2002-2003**
CPGE Agadir

Controle N°5
Corrigé

Polynomes & Fractions Rationnelles
Durée : 2 h

1. Polynomes :

a. :

i. Vu en TD
ii. Vu en TD
iii. Vu en TD
iv. Vu en TD

b. :

i. $\cos(n\theta) = \mathrm{Re}(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k (i\sin(\theta))^k \cos(\theta)^{n-k}\right), k$ pair, $\theta = \arccos(X), \sin^2 = 1 - \cos^2$,
ii. Evident, $\cos(\frac{k\pi}{n}), 1 \leq k \leq n$
iii. 1

c. :

i. $g(t) = f(t) - P(t) - A\prod_{i=1}^{n}(t - r_i)$ s'annule $n+1$ fois sur $[-1,1]$ sur les $(r_k)_{1 \leq k \leq n}$ mais aussi en x
ii. Utiliser le théorme de Rolle pour f puis pour f' ,...
iii. $\exists c_x \in [-1,1]$ tel que :
$g^{(n)}(c_x) = 0 \Rightarrow f^{(n)}(c_x) - P^{(n)}(c_x) - A\left(\prod_{i=1}^{n}(t - r_i)\right)^{(n)} = f^{(n)}(c_x) - An! = 0, \Big($ deg
iv. D'apres (iii)
v. $\left(Q - \frac{T_n}{2^{n-1}}\right)(\cos(\frac{2k\pi}{n})) = \left(Q\left(\cos\left(\frac{2p\pi}{n}\right)\right) - \frac{1}{2^{n-1}}\right) < 0, \left(\sup_{x\in[-1,1]} |Q(x)| < \frac{1}{2^{n-1}}\right)$
et $\left(Q - \frac{T_n}{2^{n-1}}\right)\left(\cos\left(\frac{(2p+1)\pi}{n}\right)\right) = \left(Q\left(\cos\left(\frac{2(p+1)\pi}{n}\right)\right) + \frac{1}{2^{n-1}}\right) > 0$
vi. $Q - \frac{T_n}{2^{n-1}}$ change de signe $n+1$ fois donc admet n racine or il est de degre $n-1$ donc nul d'ou $Q = \frac{T_n}{2^{n-1}}$ mais $\sup_{x\in[-1,1]} |T_n(x)| = 1$ contradiction
vii. car $\sup_{x\in[-1,1]} |T_n(x)| = 1$
viii. les points $(r_k)_{1 \leq k \leq n}$ réalisant la meilleure interpolation so,t les racines du polynome de *Chebechev*

2.

$$\frac{1}{2}\frac{1}{(X-1)^3} + \frac{1}{2}\frac{1}{(X-1)^2} + \frac{7}{4}\frac{1}{X-1} - \frac{3}{4}\frac{X-1}{X^2+1}$$