DL 6 : *Polynômes. Intégration sur un segment. Équations différentielles.*

Maths-PCSI.
Mr Mamouni : *myismail@altern.org*

A rendre Vendredi le 17 Mars 2006.

PROBLÈME I : (*extrait du DS d'une prépa PCSI en France 2000-2001*)

PARTIE A :

Pour tout entier naturel n, on définit l'intégrale

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n \theta \, d\theta \qquad (\textit{intégrales de Wallis}) .$$

A.1. Montrer que la suite (W_n) est décroissante et convergente.
Montrer qu'elle vérifie la relation de récurrence :

$$nW_n = (n-1)W_{n-2} \qquad \text{pour} \quad n \geq 2 .$$

A.2. Déduire de ce qui précède les relations suivantes :

a) la suite (nW_nW_{n-1}) est constante ;

b) $W_n \sim W_{n-2}$, puis $W_n \sim W_{n-1}$.

Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} W_n = 0$ et préciser un équivalent simple de (W_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

A.3. Donner la valeur de W_{2p} et W_{2p+1} en fonction de p (on exprimera ces valeurs à l'aide de factorielles).

A.4. Montrer que $\lim\limits_{p\to+\infty} \dfrac{2^{2p}(p!)^2}{(2p)!\,\sqrt{p}} = \sqrt{\pi}$ (*formule de Wallis*).

PARTIE B :

On définit deux fonctions numériques f et g sur l'intervalle $]-1,+\infty[$ par :

$$f(x) = \ln(1+x) - \frac{2x}{2+x} \qquad ; \qquad g(x) = \frac{x^3}{6(x+1)(x+2)} - f(x) .$$

B.1. Étudier les variations de f et tracer sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

B.2. Donner l'expression de $g'(x)$; en déduire le signe de $g(x)$ pour $x \in\,]-1,+\infty[$. **B.3.** On définit deux suites (u_n) et (v_n) par

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \frac{n^n\sqrt{n}}{n!\,e^n} \quad ; \quad v_n = u_n \cdot e^{\frac{1}{12\,n}} .$$

Montrer que l'on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) &= \left(n+\frac{1}{2}\right) \cdot f\left(\frac{1}{n}\right) \\ \ln(v_{n+1}) - \ln(v_n) &= -\left(n+\frac{1}{2}\right) \cdot g\left(\frac{1}{n}\right) \end{aligned} .$$

B.4. Déduire de ce qui précède que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers une même limite l, avec $l > 0$.

On pose maintenant $z_n = \dfrac{u_{2n}}{u_n^2}$.

B.5. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n$. En déduire la valeur de l.

B.6. En déduire la *formule de Stirling* :

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} .$$

PROBLÈME II : (*extrait du DS d'une prépa PCSI en France 2000-2001*)

Une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ est définie par la donnée de $P_0 = X$ et la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad P_{n+1}(X) = (n+1)\int_0^X P_n(t)\,dt + X\left[1-(n+1)\int_0^1 P_n(t)\,dt\right] .$$

1. Calculer P_1, P_2, P_3 et P_4.

2. Montrer que, pour tout n, P_n est l'unique polynôme de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant les deux conditions

$$P_n(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad P_n(X) - P_n(X-1) = X^n .$$

3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le polynôme P_n est divisible par X^2+X. Factoriser les polynômes P_1, P_2 et P_3. Ecrire P_4 sous la forme $X(X+1)Q_4$.

4. Montrer que le polynôme P_n est de degré $n+1$, calculer son coefficient dominant, ainsi que le coefficient de X^n.

5. Montrer que, pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}^*$, on a $P_n(p) = \sum\limits_{k=1}^{p} k^n$.

PROBLÈME III : (*extrait de : Mines d'Alès, 1992*)

Pour tout entier naturel non nul n, on considère la fonction f_n de la variable réelle x définie sur $[-1,1]$ par :

$$f_n(x) = \sin(2n\ \operatorname{Arcsin} x) .$$

A.1. Étudier la parité de f_n ; calculer $f_n(0)$ et $f_n(1)$.

A.2. Résoudre, dans $[0,1]$, l'équation $f_n(x) = 0$.

A.3. Démontrer que f_n est continue sur $[-1,1]$, dérivable sur $]-1,1[$ et calculer $f_n'(x)$.

A.4. Étudier la dérivabilité de f_n en 1 à gauche, en -1 à droite.

A.5. Calculer l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,dx$.

A.6. Étudier f_1 et tracer sa courbe représentative C_1 dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ (unité : 4 cm).

A.7. Calculer , en cm^2, l'aire $\mathcal{A}$ de l'ensemble des points du plan de coordonnées x et y vérifiant

$$\begin{cases} 0 \leq xie1 \\ 0 \leq y \leq f_1(x) \end{cases}$$

B.1. Pour tout entier naturel non nul p et pour tout réel x de $[0,1[$, on considère l'intégrale

$$J_p(x) = \int_0^x \frac{f_p^2(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt .$$

a. Calculer $J_p(x)$ et l'exprimer en fonction de $f_{2p}(x)$.

b. Déterminer, si elle existe, la limite de $J_p(x)$ quand x tend vers 1 par valeurs inférieures.

B.2. Pour tout couple (p,q) d'entiers naturels non nuls avec $p > q$, et pour tout réel x de $[0,1[$, on considère l'intégrale

$$K_{p,q}(x) = \int_0^x \frac{f_p(t)\,f_q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt .$$

a. Calculer $K_{p,q}(x)$ et l'exprimer en fonction de $f_{p+q}(x)$ et $f_{p-q}(x)$.

b. Déterminer, si elle existe, la limite de $K_{p,q}(x)$ quand x tend vers 1 par valeurs inférieures.

C.1. En utilisant la formule de Moivre, démontrer que, pour tout entier naturel non nul n, il existe un polynôme P_n à coefficients entiers relatifs tel que, pour tout réel θ, on ait l'égalité

$$\sin(2n\theta) = \sin\theta \cdot \cos\theta \cdot P_n(\sin\theta) \ .$$

C.2. Déduire de la relation précédente que, pour tout réel x de $[-1, 1]$:

$$f_n(x) = x\,\sqrt{1-x^2}\,P_n(x) \ .$$

Expliciter $P_1(x)$, $P_2(x)$ et $P_3(x)$.

C.3. Montrer que l'on peut écrire $P_n(x)$ sous la forme

$$P_n(x) = a_0 + a_1\,x^2 + \cdots + a_p\,x^{2p} \qquad (p \in \mathbb{N}\ ;\ a_p \neq 0)$$

et déterminer en fonction de n les valeurs de p, a_p, $P_n(0)$ et $P_n(1)$.

C.4. Résoudre successivement dans $[0, 1]$, dans $[-1, 1]$ puis dans $\mathbb{R}$, l'équation $P_n(x) = 0$.

C.5. En déduire la factorisation dans $\mathbb{R}[X]$ du polynôme P_n.

PROBLÈME IV : (*extrait d'un Bac français 2004*)

Aucune connaissance de physique n'est nécessaire pour résoudre cet exercice.

Un condensateur de capacité C, ($C = 5.10^{-5}$ farads) se décharge dans une résistance sans self R, ($R = 104$ ohms).

La différence de potentiel u (exprimée en volts), l'intensité i (exprimée en ampères) et la quantité de charges q (exprimée en coulombs) sont des fonctions du temps t (exprimé en secondes).

1) Sachant qu'à tout instant t on a : $u(t) + Ri(t) = 0, q(t) = Cu(t), i(t) = q'(t)$
établir que u vérifie l'équation différentielle : $u' + 2u = 0$.

2) Résoudre l'équation différentielle : $u' + 2u = 0$.
Trouver la solution particulière qui vérifie : $u(0) = 30$

3) Déterminer l'instant t_1 pour lequel la différence de potentiel u est égale au quart de sa valeur initiale $u(0)$.

4) Calculer l'énergie W (exprimée en joules) dissipée entre les instants $t = 0$ et $t = t_1$ (t_1 déterminé au 3.) sachant que :

$$W = \int_0^{t_1} Ri^2(t)dt = \int_0^{t_1} \frac{u^2(t)}{R}dt$$

Donner la valeur exacte puis une valeur décimale approchée à 10^{-2} près.

Fin.